

6-त्रिभुज

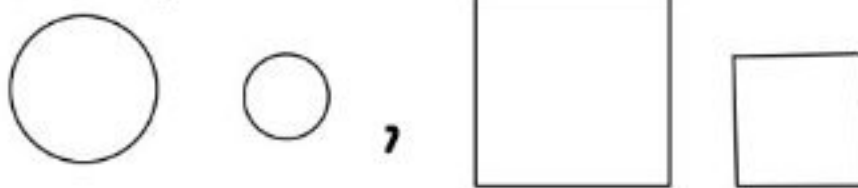
प्रश्नावली 6.1

प्रश्न-1 कोष्ठकों में दिए शब्दों में से सही शब्दों का प्रयोग करते हुए रिक्त स्थान भरिए।

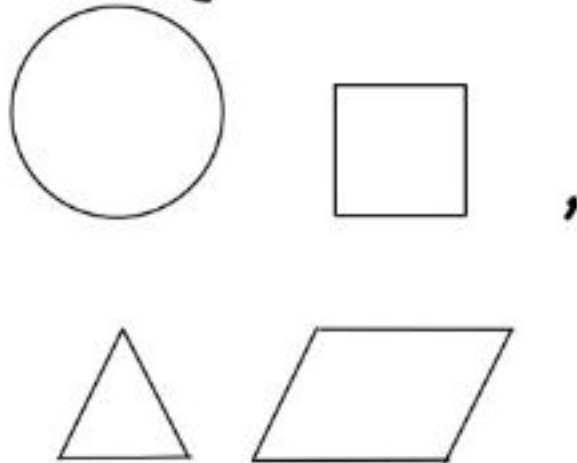
- सभी वृत्त समरूप होते हैं। (सर्वांगसम, समरूप)
- सभी वर्ग समरूप होते हैं। (समरूप सर्वांगसम)
- सभी त्रिभुज समबाहु होते हैं। (समद्विबाहु, समबाहु)
- भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि
 - उनके संगत कोण बराबर हो तथा
 - उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों। (बराबर, समानुपाती)

प्रश्न-2 निम्नलिखित युग्मों के दो भिन्न-भिन्न उदाहरण दीजिए।

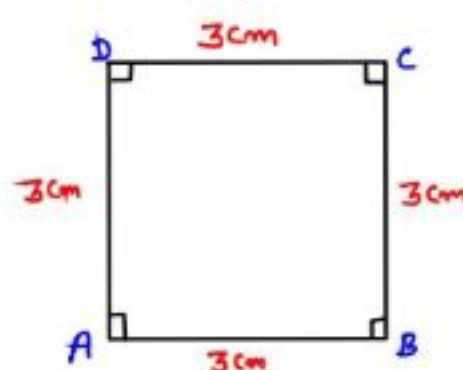
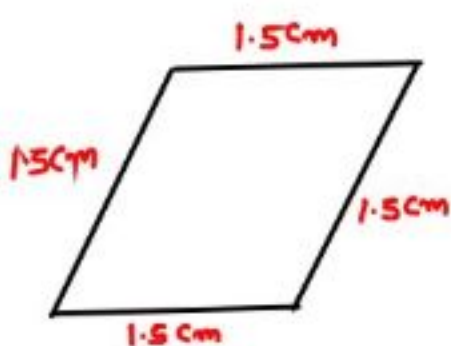
(i) समरूप आकृतियाँ



(ii) ऐसी आकृतियाँ जो समरूप नहीं हैं।



प्रश्न-3 बताइए कि निम्नलिखित चतुर्भुज समरूप हैं या नहीं?



चतुर्भुज समरूप नहीं हैं
क्योंकि संगत कोण समान
नहीं हैं।

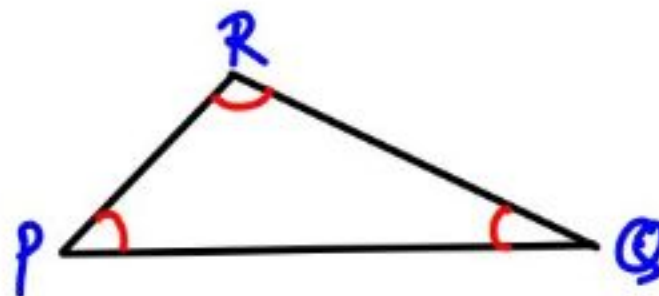
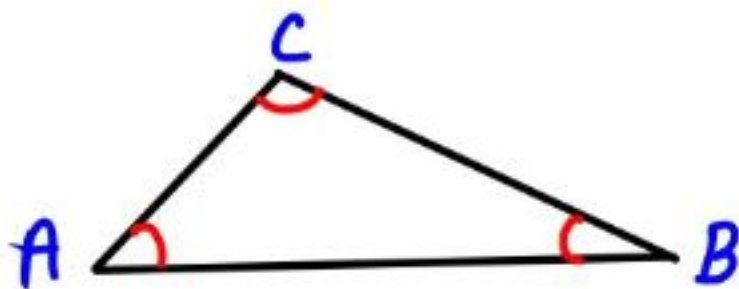
★ दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि,

(i) उनके संगत कोण बराबर हों, तथा

(ii) उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) हों।

समानकोणिक त्रिभुज :-

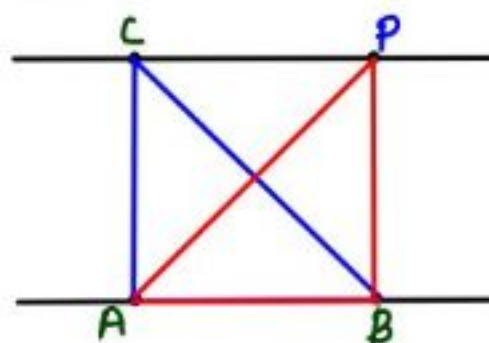
यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण समान हों तो उन्हें समकोणिक त्रिभुज कहते हैं।



“ दो समकोणिक त्रिभुजों में उनकी संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान रहता है। ”

“ एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं। ”

क्षेत्रफल $(ABC) = (ABP)$



प्रमेय 6.1 थैल्स प्रमेय / आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय :-

कथन: यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।

दिया है :- $DE \parallel BC$

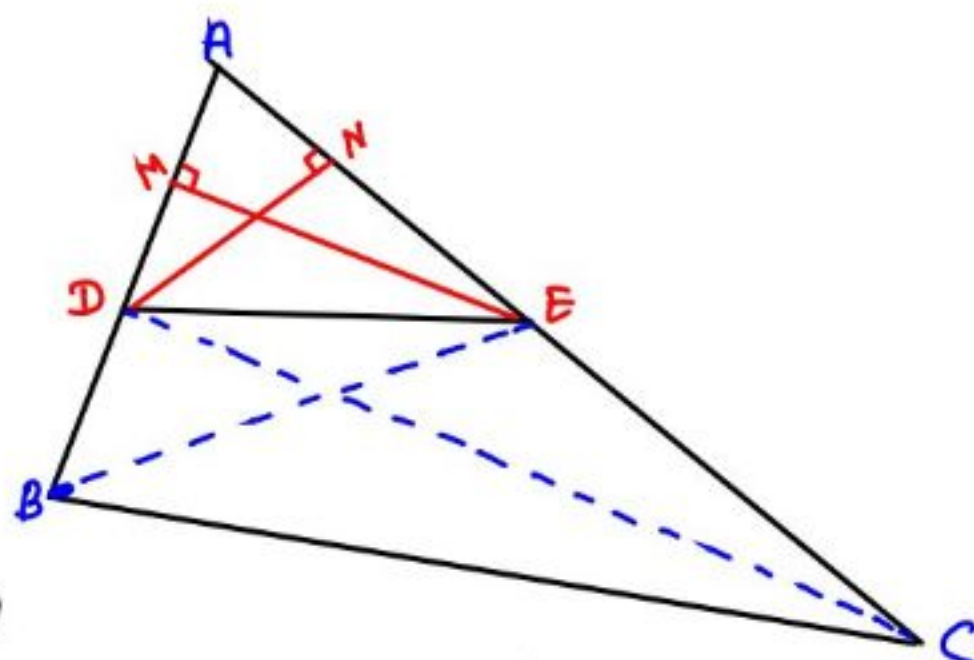
सिद्ध करना है :-

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

रचना :-

(i) B को E बिन्दु से तथा D को C बिन्दु से मिलाया।

(ii) D से AE पर लम्ब DN खींचा तथा E से AD पर लम्ब EM खींचा



उपपत्ति:

$$\Rightarrow \Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\Rightarrow \Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times AD \times EM \quad \text{--- (1)}$$

$$\Rightarrow \Delta DBE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\Rightarrow \Delta DBE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times DB \times EM \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\Rightarrow \Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times AE \times DN \quad (3)$$

$$\Rightarrow \Delta ECD \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\Rightarrow \Delta ECD \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times EC \times DN \quad (4)$$

$$\frac{\text{समीकरण (1)}}{\text{समीकरण (2)}} \Rightarrow \frac{\Delta DBE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DBE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} \times DB \times EM}{\frac{1}{2} \times DB \times EM} = \frac{AD}{DB} \quad (5)$$

$$\frac{\text{समीकरण (3)}}{\text{समीकरण (4)}} \Rightarrow \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ECD \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DN}{\frac{1}{2} \times EC \times DN} = \frac{AE}{EC} \quad (6)$$

\therefore एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

$$\Rightarrow \therefore \Delta DBE \text{ का क्षेत्रफल} = \Delta ECD \text{ का क्षेत्रफल} \quad (7)$$

समीकरण 5 में 6 से मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{\Delta ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ECD \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AD}{DB} \quad (8)$$

समीकरण 6 से 8 में मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}}$$

“ दो समानकोणिक त्रिभुजों की संगत भुजाएँ सदैव समानुपाती होती हैं ”

ΔADE & ΔABC - समानकोणिक

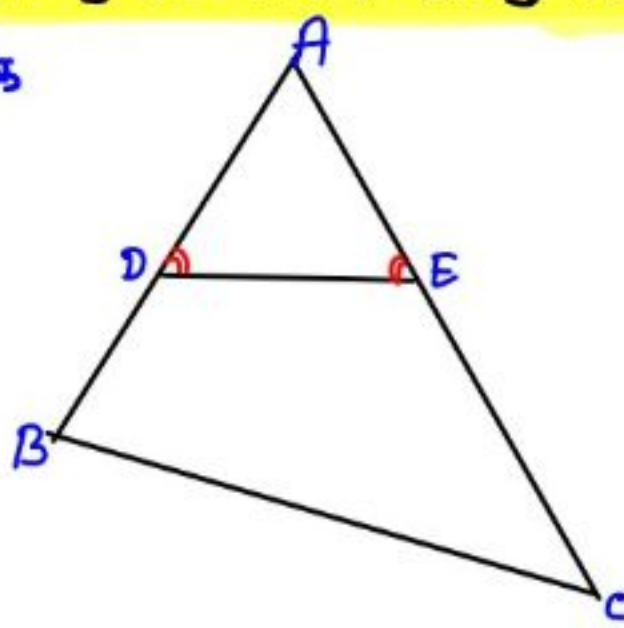
$$\Rightarrow \angle A = \angle A$$

$$\Rightarrow \angle D = \angle B \text{ (संगत कोण)}$$

$$\Rightarrow \angle E = \angle C \text{ (संगत कोण)}$$

सिद्ध करना:-

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



थेल्लस प्रमेय :-

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

चुल्क्रम करने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC+AE}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

चुल्क्रमे लेने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}}$$

उदाहरण-1 यदि कोई रेखा एक $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करे तथा भुजा BC के समान्तर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ होगा।

$\triangle ADE$ & $\triangle ABC$ - समानकोणिक

$$\Rightarrow \angle A = \angle A$$

$$\Rightarrow \angle D = \angle B \text{ (संगत कोण)}$$

$$\Rightarrow \angle E = \angle C \text{ (संगत कोण)}$$

सिद्ध करना:-

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

थेल्लस प्रमेय :- $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

\Rightarrow चुल्क्रम करने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

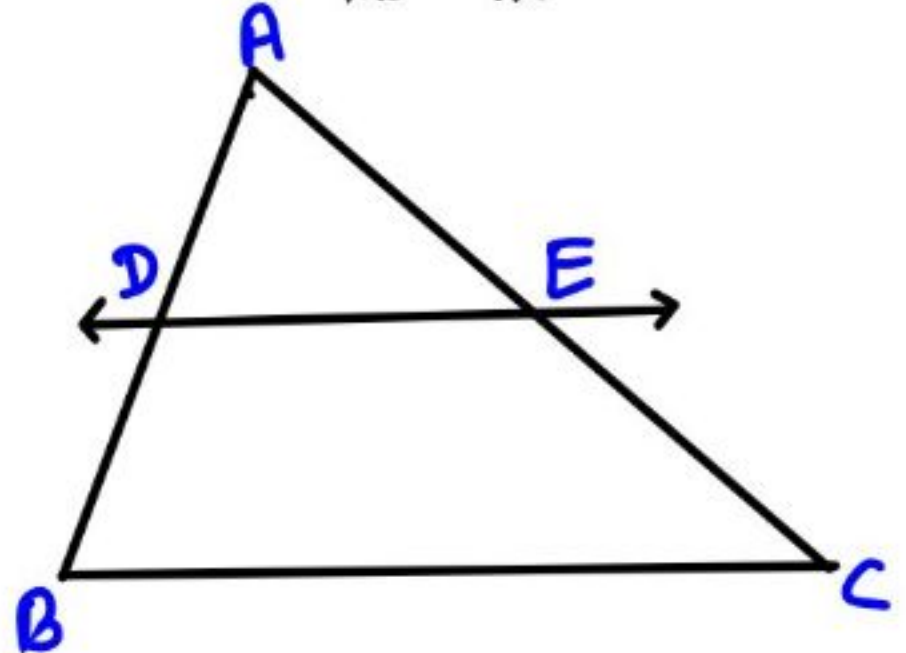
$$\Rightarrow \frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC+AE}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

चुल्क्रमे लेने पर \rightarrow

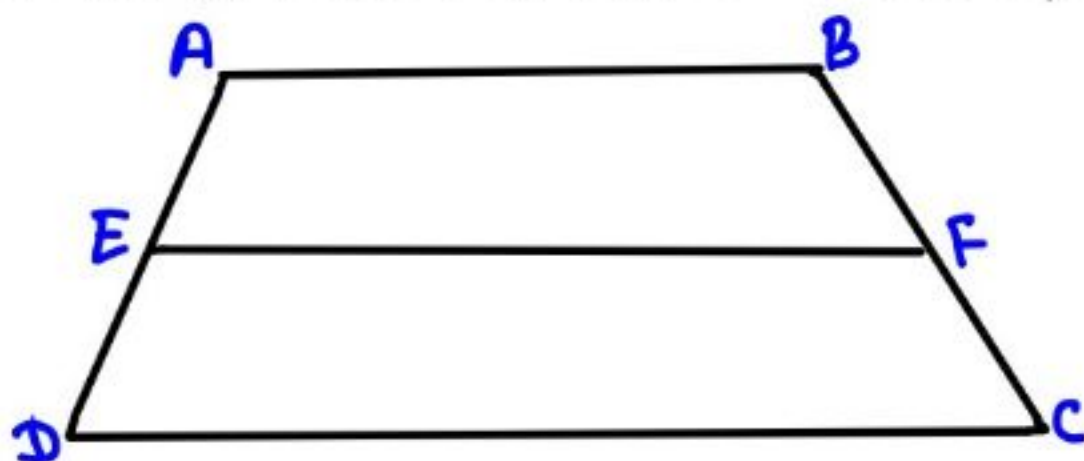
$$\Rightarrow \boxed{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}}$$



उदाहरण-2 $ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel DC$ है। असमान्तर भुजाओं AD और BC पर क्रमशः बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि EF भुजा AB के समान्तर है। दर्शाइए कि,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \text{ है।}$$

हल- दिया है:- $AB \parallel DC$ तथा $AB \parallel EF$
अतः $EF \parallel DC$



सिद्ध करना है:- $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$

रचना:- A से C को मिलाने वाली रेखा खींची जो EF रेखाखण्ड को बिन्दु M पर काटती है।

$$\Delta ADC \text{ में } EF \parallel DC \\ \Rightarrow EM \parallel DC$$

$$\Rightarrow \text{अतः थेल्स प्रमेय से } \frac{AE}{ED} = \frac{AM}{MC} \text{ --- (1)}$$

ΔABC में,

$$AB \parallel EF \\ \Rightarrow AB \parallel MF$$

$$\Rightarrow \text{अतः थेल्स प्रमेय से } \frac{AM}{MC} = \frac{BF}{FC} \text{ --- (2)}$$

समीकरण (2) से मान (1) में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}}$$

उदाहरण-3 आकृति में $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ है तथा $\angle PST = \angle PRQ$ है। सिद्ध कीजिए कि ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

हल-

दिया है:- $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

अतः थेल्स प्रमेय के विलोम से, $ST \parallel QR$

$$\therefore ST \parallel QR$$

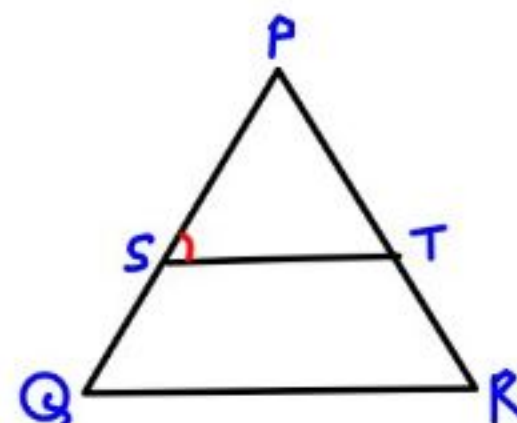
$$\therefore \angle PST = \angle PRQ \text{ --- (1)}$$

$$\text{दिया है कि } \angle PST = \angle PRQ \text{ --- (2)}$$

समीकरण 1 से $\angle PST$ का मान (2) में \rightarrow

$$\angle PQR = \angle PRQ$$

$$\text{अतः } PR = PQ$$



(त्रिभुज में समान कोणों के सामने वाली भुजाएँ भी समान होती हैं)

अतः ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रनावली 6.2

प्रश्न-1 आकृति (i) और (ii) में $DE \parallel BC$ है।
(i) में EC और (ii) में AD ज्ञात कीजिए।

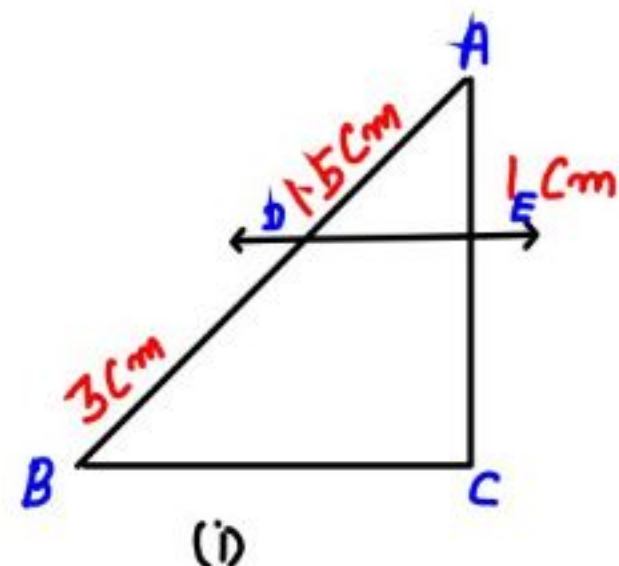
(i) $\because DE \parallel BC,$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad - (1)$$

$$\frac{1.5}{3} = \frac{1}{EC}$$

$$\Rightarrow (1.5)EC = 3 \times 1$$

$$EC = \frac{3}{1.5} = 2 \text{ cm}$$



(ii) $EC = 2 \text{ cm}$

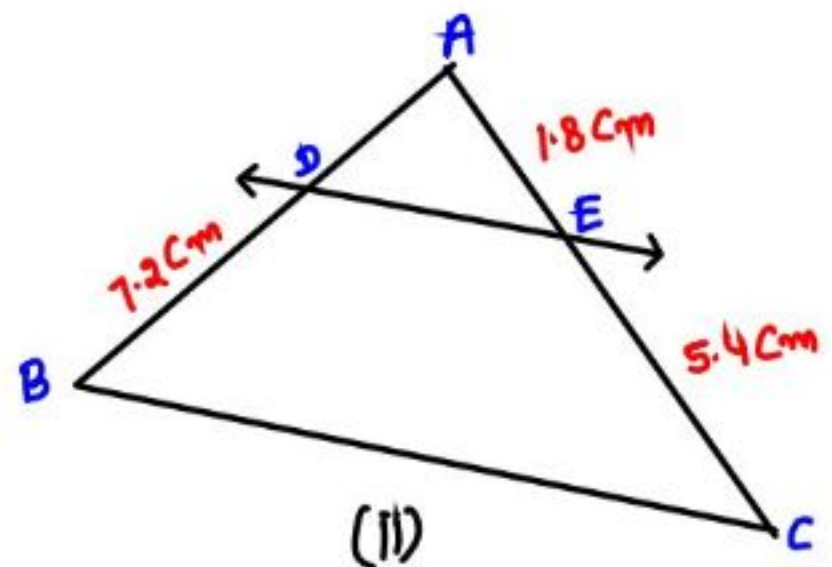
$$\frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow (5.4)AD = 1.8 \times 7.2$$

$$\Rightarrow AD = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{24}{10} = 2.4 \text{ cm}$$

$AD = 2.4 \text{ cm}$



प्रश्न-2 किसी ΔPQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E तथा F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए बताइए कि क्या $EF \parallel QR$ है?

(i) $PE = 3.9 \text{ cm}, EQ = 3 \text{ cm}, PF = 3.6 \text{ cm}$ और $FR = 2.4 \text{ cm}$

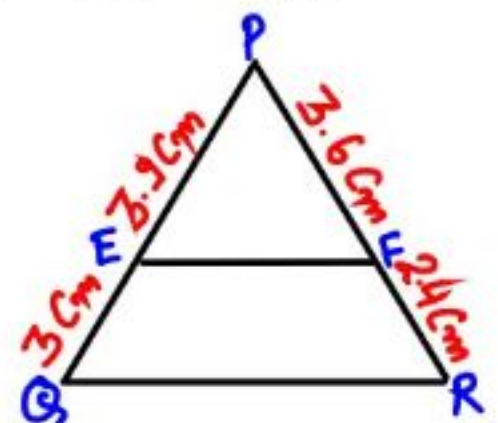
$$\frac{PE}{EQ} = \frac{3.9}{3} = \frac{13}{10} = 1.3$$

$\frac{PE}{EQ} = 1.3$

$$\frac{PF}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$\frac{PF}{FR} = 1.5$

$$\frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$$



\therefore थेलस प्रमेय के विलोम से, EF तथा QR समान्तर नहीं हैं।

(ii) $PE = 4\text{cm}$, $QE = 4.5\text{cm}$, $PF = 8\text{cm}$ और $RF = 9\text{cm}$

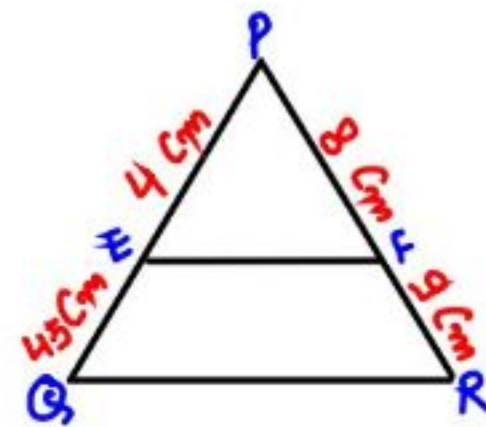
$$\frac{PE}{EQ} = \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$$

$$\boxed{\frac{PE}{EQ} = \frac{8}{9}}$$

$$\boxed{\frac{PF}{FR} = \frac{8}{9}}$$

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

∴ बेल्स प्रमेय के विनोम से, $EF \parallel QR$



(i) $PQ = 1.28\text{cm}$, $PR = 2.56\text{cm}$, $PE = 0.18\text{cm}$, $PF = 0.36\text{cm}$

$$QE = 1.28 - 0.18 \\ = 1.1\text{cm}$$

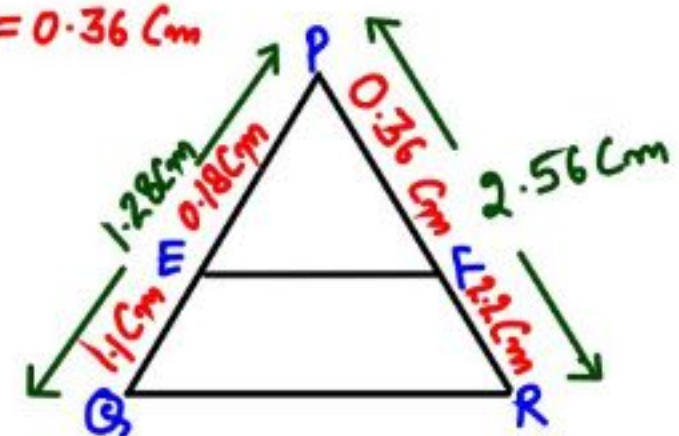
$$FR = 2.56 - 0.36 \\ = 2.2\text{cm}$$

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{0.18}{1.1}$$

$$\frac{PF}{FR} = \frac{0.36}{2.2} = \frac{0.18}{1.1}$$

$$\therefore \boxed{\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}}$$

∴ बेल्स प्रमेय के विनोम से, $EF \parallel PQ$



प्रश्न-3 आकृति में यदि $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ है।

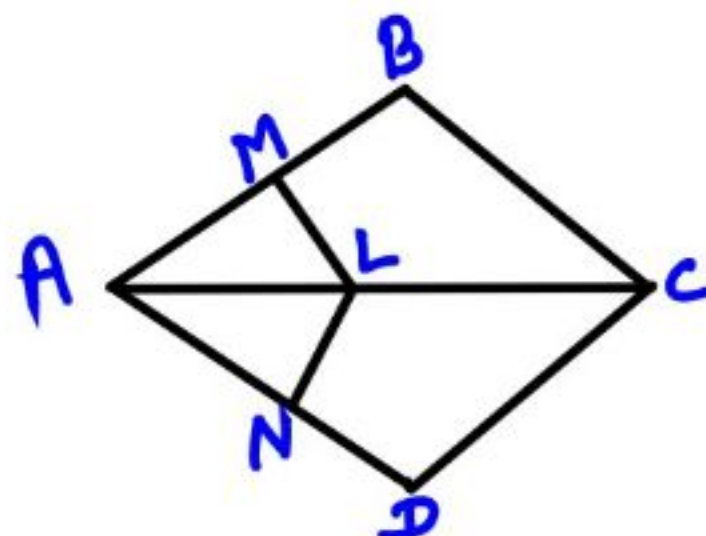
हल:

दिया है :-

$LM \parallel BC$, $LN \parallel DC$

सिद्ध करना है :-

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$$



ΔABC में,

$LM \parallel BC$ अतः थेल्स प्रमेय से,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AL}{LC} \quad \text{--- ①}$$

ΔACD में,

$LN \parallel DC$ अतः थेल्स प्रमेय से \rightarrow

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AN}{ND} \quad \text{--- ②}$$

समीकरण ② से मान ① में रखने पर \rightarrow

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND}$$

चुल्क्रम करने पर \rightarrow

$$\frac{MB}{AM} = \frac{ND}{AN}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{AM} + 1 = \frac{ND}{AN} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{MB + AM}{AM} = \frac{ND + AN}{AN}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AD}{AN}$$

चुल्क्रम करने पर \rightarrow

$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}}$$

प्रश्न-4 आकृति में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ हैं। सिद्ध कीजिए कि, $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।

हल-

दिया है :- $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$

सिद्ध करना है :-

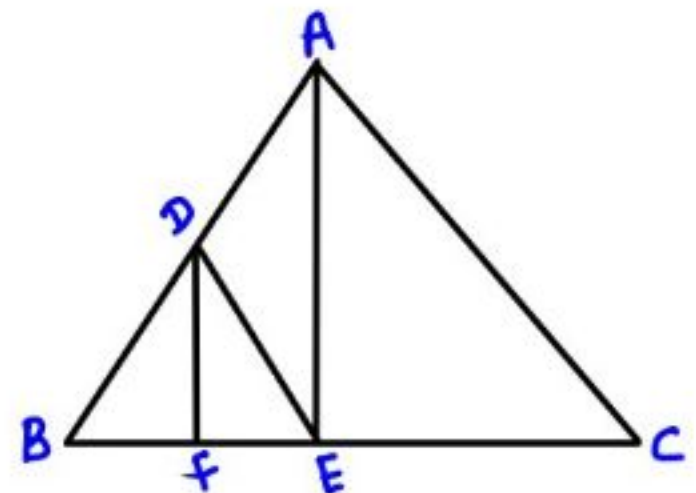
$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$$

ΔBAE में, $DF \parallel AE$ अतः थेल्स प्रमेय से

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BF}{FE} \quad \text{--- ①}$$

ΔABC में,

$DE \parallel AC$ अतः थेल्स प्रमेय से,



$$\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} \quad - (2)$$

समीकरण 1 से मान 2 में रखने पर \rightarrow

$$\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$$

प्रश्न-5 आकृति में $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$ हैं। दर्शाइए कि $EF \parallel QR$ हैं।

हल:-

दिया है:- $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$

सिद्ध करना है:-

$$EF \parallel QR$$

ΔPQO में,

$DE \parallel OQ$ अतः थेल्स प्रमेय से,

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO} \quad - (1)$$

ΔPOR में,

$DF \parallel OR$ अतः थेल्स प्रमेय से,

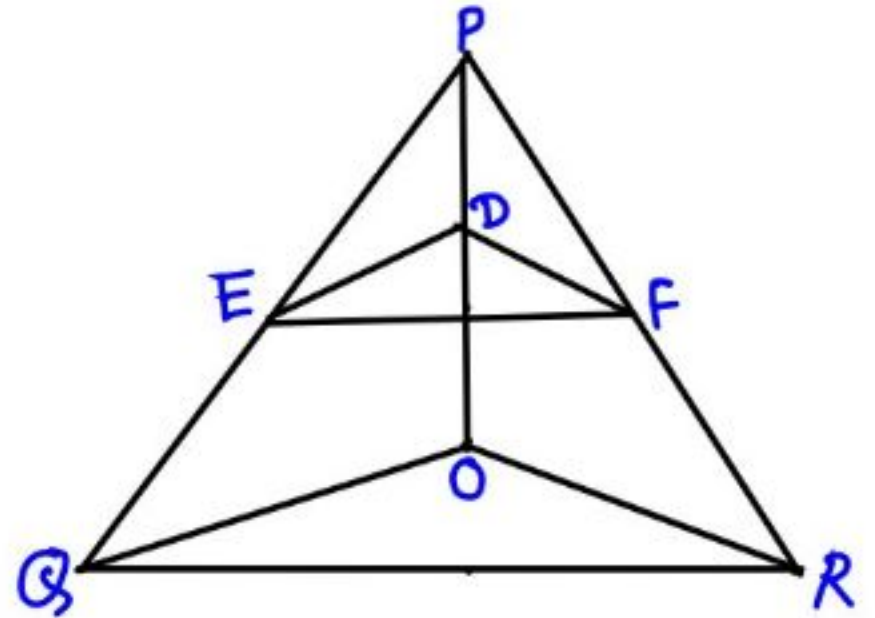
$$\frac{PD}{DO} = \frac{PF}{FR} \quad - (2)$$

समीकरण (2) से मान (1) में रखने पर \rightarrow

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$$

अतः ΔPQR में थेल्स प्रमेय के विलोम से,

$$EF \parallel QR$$



प्रश्न-6 आकृति में क्रमशः OP, OQ और OR पर स्थित बिन्दु A, B और C हैं इस प्रकार हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ हैं। दर्शाइए कि $BC \parallel QR$ हैं।

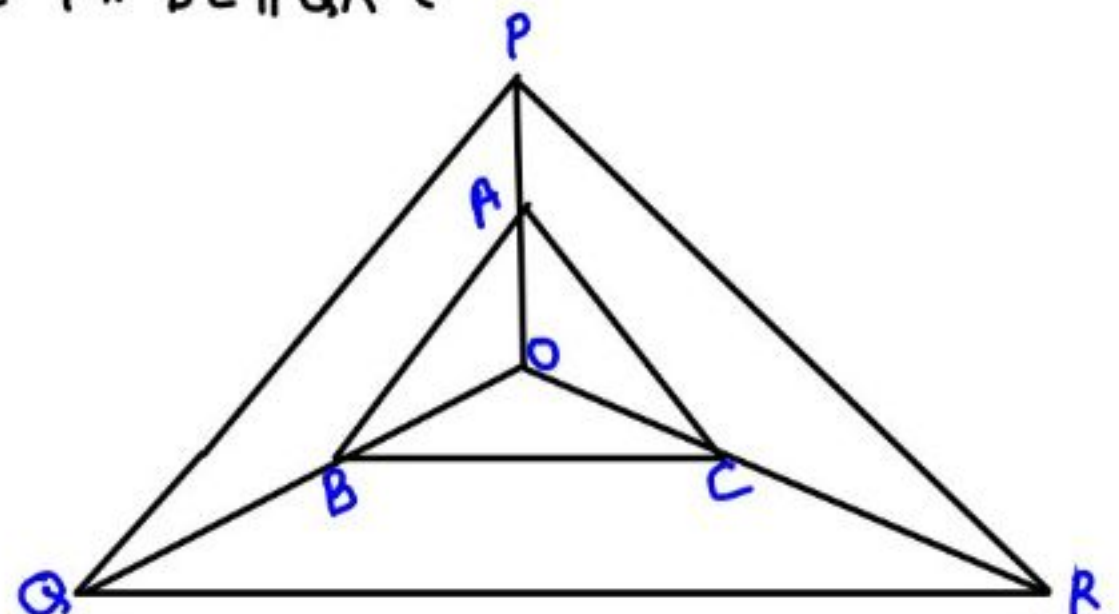
हल:-

दिया है:- $AB \parallel PQ$ एवं $AC \parallel PR$

सिद्ध करना है:- $BC \parallel QR$

ΔOPQ में,

$$AB \parallel PQ$$



अतः थेल्स प्रमेय से,

$$\frac{OA}{AP} = \frac{OC}{CR} \quad - (3)$$

समीकरण (1) से मान (2) में रखने पर \rightarrow

$$\frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$$

अतः ΔOQR में,

थेल्स प्रमेय के विरोध से,

$$BC \parallel QR$$

प्रश्न-7 प्रमेय 6.1 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

हल:-

दिया है:- (i) P, AB का मध्य बिन्दु है।

$$\text{अतः } AP = PB \rightarrow (1)$$

(ii) $PQ \parallel BC$

सिद्ध करना है:- Q, AC का मध्य बिन्दु है।

ΔABC में,

$$PQ \parallel BC$$

अतः थेल्स प्रमेय से,

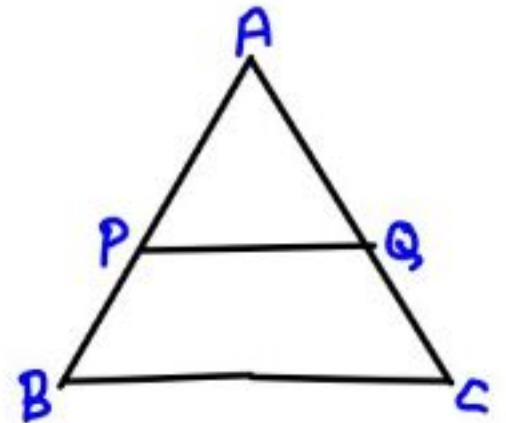
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\frac{PB}{PB} = \frac{AQ}{QC} \quad [\text{समीकरण (1) से}]$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{AQ}{QC}$$

$$QC = AQ$$

$\Rightarrow Q$, AC का मध्य बिन्दु है।



प्रश्न-8 प्रमेय 6.2 का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर होती है।

हल:-

दिया है:-

P, AB का मध्य बिन्दु है और

Q, AC का मध्य बिन्दु है अतः

$$AP = PB \quad - (1)$$

$$\text{तथा } AQ = QC \quad - (2)$$

सिद्ध करना है :-

$$PQ \parallel BC$$

ΔABC में,

$$\frac{AP}{PB} = \frac{PB}{PB} \quad [\text{समीकरण (1) से}]$$

$$\frac{AP}{PB} = 1 \rightarrow (3)$$

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{QC}{QC} \quad [\text{समीकरण (2) से}]$$

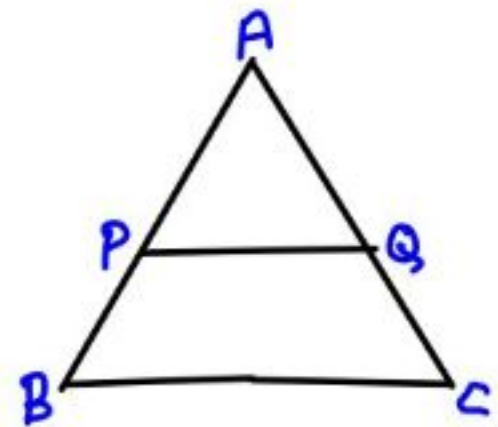
$$\frac{AQ}{QC} = 1 \rightarrow (4)$$

समीकरण (3) एवं (4) से \rightarrow

$$\boxed{\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}}$$

अतः थेल्स प्रमेय के विलोम से,

$$\boxed{PQ \parallel BC}$$



प्रश्न-3 $ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें $AB \parallel DC$ है तथा उसके विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

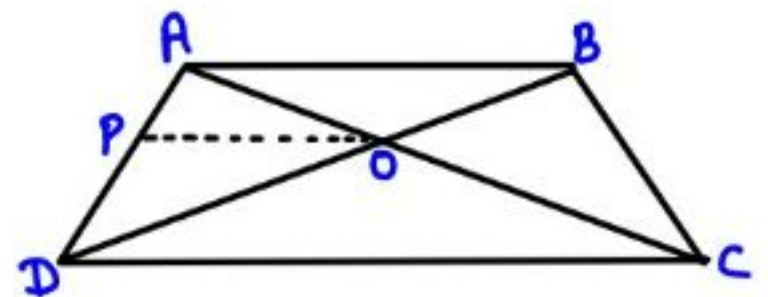
हल:-

दिया है:-

$$AB \parallel DC$$

सिद्ध करना है :-

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$



रचना:- O से गुजरती हुई रेखाखण्ड OP खींचा जो AB तथा DC के समान्तर है।

$$AB \parallel PO \text{ एवं } DC \parallel PO$$

ΔADC में,

$$PO \parallel DC$$

अतः थेल्स प्रमेय से,

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AO}{OC} \quad - (1)$$

ΔADB में,

$$AB \parallel PO$$

अतः थेल्स प्रमेय से \rightarrow

$$\frac{AP}{PD} = \frac{BO}{OD} \quad - (2)$$

समीकरण (1) से मान (2) में रखने पर \rightarrow

$$\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$$

$$\boxed{\frac{AO}{BO} = \frac{OC}{OD}}$$

प्रश्न-10 एक चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \text{ हैं। दर्शाइए कि } ABCD \text{ एक समलम्ब चतुर्भुज है।}$$

हल:-

दिया है:-

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \quad - (1)$$

सिद्ध करना है:-

$ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है।

या $AB \parallel CD$

रचना:-

P से O तक रेखा खींची जो AB के समान्तर हो।

$$AB \parallel PO$$

ΔABD में,

$AB \parallel PO$ अतः

थेल्स प्रमेय से,

$$\frac{AP}{PD} = \frac{BO}{DO} \quad - (2)$$

[समीकरण (1) से] \rightarrow

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

$$= \frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \quad - (3)$$

समीकरण (3) से मान (4) में रखने पर \rightarrow

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AO}{CO}$$

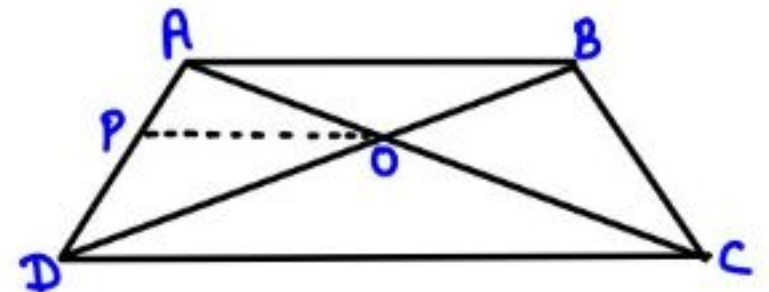
अतः ΔADC में,

थेल्स प्रमेय के विलोम से-

$$PO \parallel DC$$

$$AB \parallel PO \parallel DC \rightarrow AB \parallel DC$$

अतः $ABCD$ एक समलम्ब चतुर्भुज है।



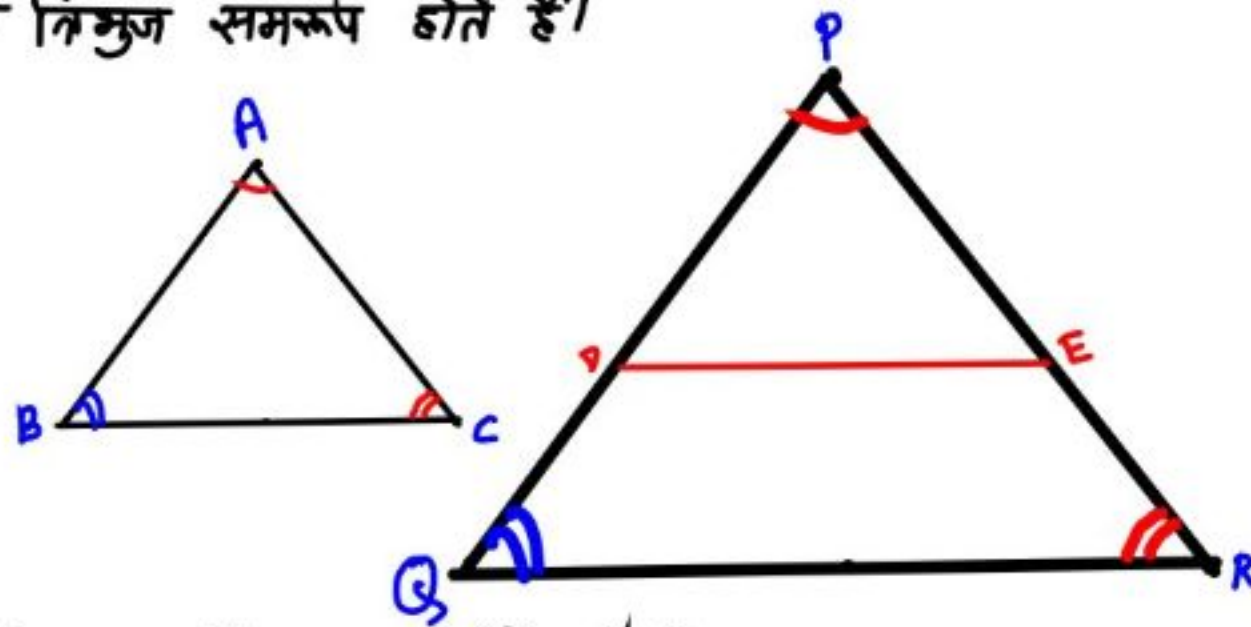
प्रमेय 6.3

कथन:- यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों तो उनकी संगत भुजाएँ एक ही अनुपात में (समानुपाती) होती हैं और इसलिए ये त्रिभुज समरूप होते हैं।

हल:-

दिया है:-
 $LA = LP$ - (1)
 $LB = LQ$ - (2)
 $LC = LR$ - (3)

सिद्ध करना है:-
 $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$



रचना:- भुजा PQ तथा PR पर दो बिन्दु D और E इस लिए हैं कि,

$AB = PD$
 एवं $AC = PE$ - (4)
 अब D एवं E को मिलाने हैं।

उपपत्ति:- $\triangle ABC$ एवं $\triangle PDE$ में
 समीकरण (1), (4) एवं (3) से
 $\triangle ABC \cong \triangle PDE$

(भुजा - कोण - भुजा सर्वांगसमता)

अतः दोनों त्रिभुजों के संगत कोण एवं संगत भुजाएँ बराबर होंगी।

अतः $LA = LP$
 $LB = LD$ - (6)
 एवं $LC = LE$ - (7)

समीकरण (6) से मान (2) में तथा समीकरण (7) से मान (3) में रखने पर ->

$LD = LQ$ -> (8)
 एवं $LE = LR$ -> (9)

समीकरण (8) एवं (9) से ->

$DE \parallel QR$ संगत कोण

$\triangle PQR$ में,

$DE \parallel QR$

अतः थेल्स प्रमेय से ->

$\frac{PD}{DQ} = \frac{PE}{ER}$ - (10)

सुलभ करने पर ->

$\frac{DQ}{PD} = \frac{ER}{PE}$

$\frac{DQ}{PD} + 1 = \frac{ER}{PE} + 1$

$$\frac{DQ + PD}{PD} = \frac{ER + PE}{PE}$$

$$\frac{PQ}{PD} = \frac{PR}{PE}$$

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC}$$

चुक्रमे लेने पर \rightarrow

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

अतः

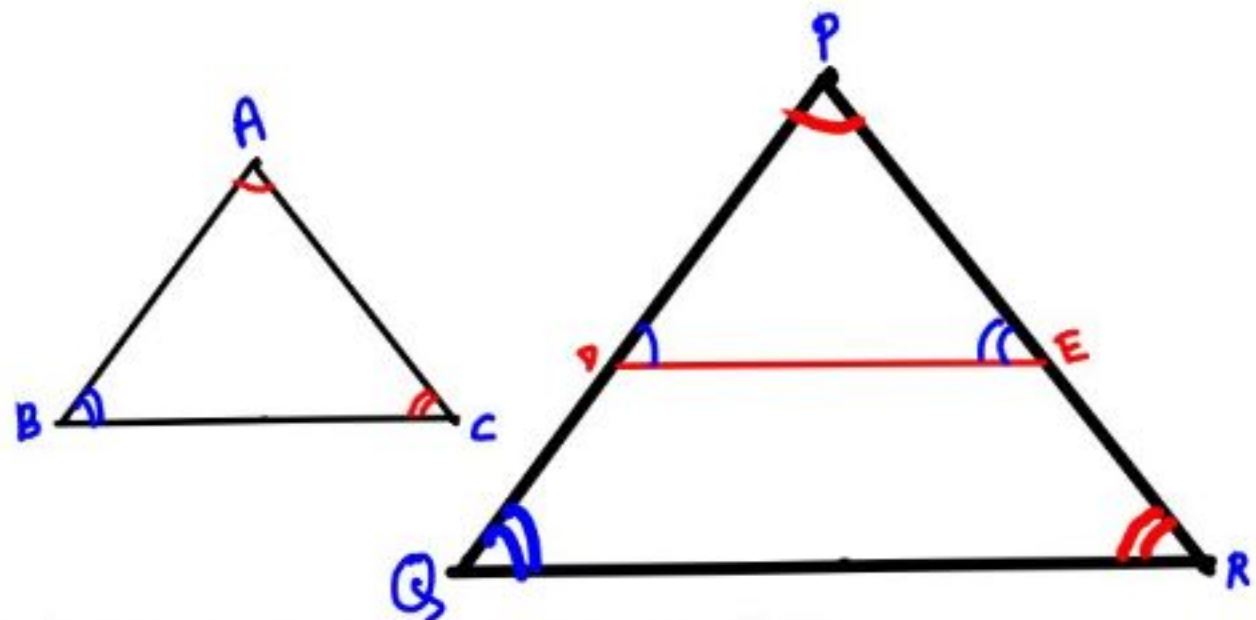
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

प्रमेय 6.4 यदि दो भुजाओं में एक त्रिभुज की भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की भुजाओं के समानुपाती हों तो इसके संगत कोण बराबर होते हैं और इसलिए दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

दिया है:- $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \quad \text{--- (1)}$

सिद्ध करना है:-

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle P \\ \angle B &= \angle Q \\ \angle C &= \angle R \end{aligned}$$



रचना:-

D एवं E बिन्दु रेखाखण्डों PQ तथा PR पर इस प्रकार हैं कि,

$$AB = PD \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{एवं } AC = PE \quad \text{--- (3)}$$

उपपत्ति:-

समीकरण (1) से

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{PD}{PQ} = \frac{PE}{PR} \quad [\text{समीकरण (2) व (3) से}]$$

चुक्रमे करने पर \rightarrow

$$\frac{PQ}{PD} = \frac{PR}{PE}$$

$$\frac{PQ}{PD} - 1 = \frac{PR}{PE} - 1$$

$$\frac{PQ - PD}{PD} = \frac{PR - PE}{PE}$$

$$\frac{DQ}{PD} = \frac{ER}{PE}$$

चुल्लम करने पर →

$$\frac{PD}{DQ} = \frac{PE}{ER}$$

अतः थैल्स प्रमेय के विलोम से,

$$DE \parallel QR$$

अतः संगत कोण समान होंगे,

$$\angle D = \angle Q \quad \text{--- (5)}$$

$$\angle E = \angle R \quad \text{--- (6)}$$

अतः कोण-कोण समरूपता से

$$\Delta PDE \sim \Delta PQR$$

$$\frac{PD}{PQ} = \frac{PE}{PR} = \frac{DE}{QR}$$

$$\frac{PD}{PQ} = \frac{DE}{QR}$$

$$\text{समी. 2 से} \rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{DE}{QR} \quad \text{--- (7)}$$

समीकरण (1) से मान (7) में रखने पर →

$$\frac{BC}{QR} = \frac{DE}{QR}$$

$$\boxed{BC = DE}$$

$$\text{समीकरण (5) से} \rightarrow AB = PD$$

$$\text{समीकरण (6) से} \rightarrow AC = PE$$

$$\text{समीकरण (8) से} \rightarrow BC = DE$$

अतः भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता से,

$$\Delta ABC \cong \Delta PDE$$

अतः

$$\angle A = \angle P$$

$$\angle B = \angle D \Rightarrow \angle B = \angle Q \quad (\text{समी. 5 से})$$

$$\angle C = \angle E \Rightarrow \angle C = \angle R \quad (\text{समी. 6 से})$$

अतः

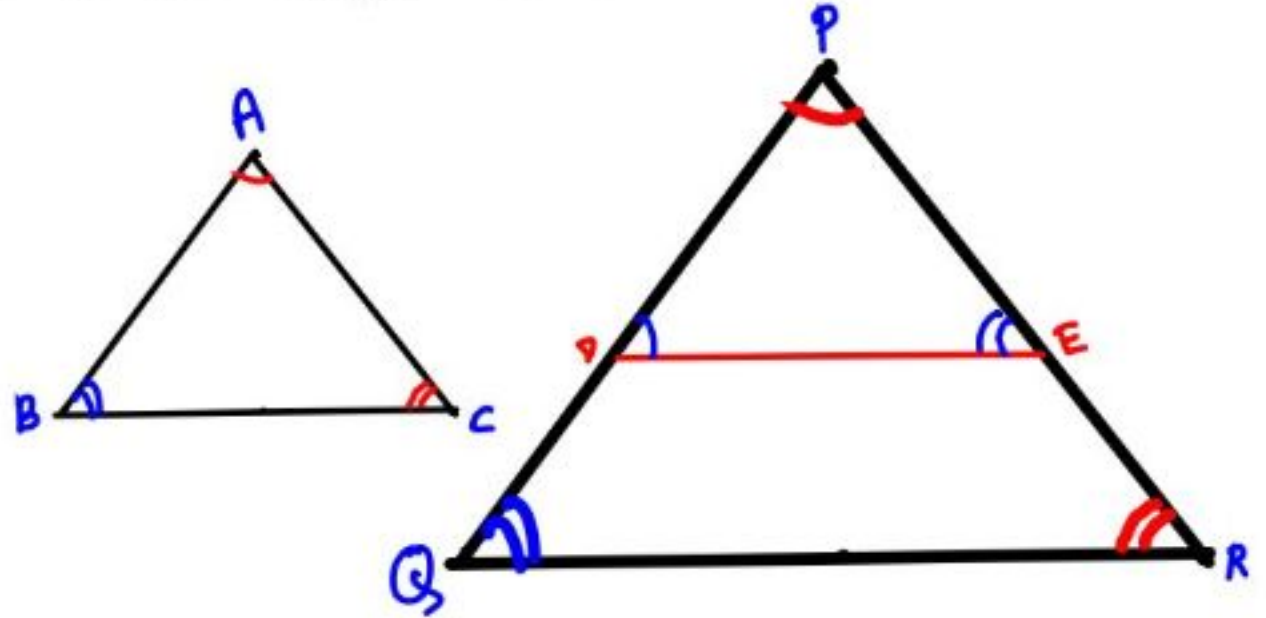
$$\boxed{\begin{array}{l} \angle A = \angle P \\ \angle B = \angle Q \\ \angle C = \angle R \end{array}}$$

प्रमेय 6.5 यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अन्तर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

दिया है:- $\angle A = \angle P$ — (1)

एवं $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ — (2)

सिद्ध करना है:- $\triangle ABC \sim \triangle PQR$



रचना:- बिन्दु D तथा E भुजा PQ तथा PR पर इस प्रकार हैं कि,

$$AB = PD \text{ — (3)}$$

$$\text{तथा } AC = PE \text{ — (4)}$$

अब, D को E से मिलाया।

उपपत्ति:- $\triangle ABC$ तथा $\triangle PDE$ में,

$$AB = PD \text{ (समी. 3 से)}$$

$$AC = PE \text{ (समी. 4 से)}$$

$$\text{एवं } \angle A = \angle P \text{ (समी. 1 से)}$$

अतः भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता से,

$$\triangle ABC \cong \triangle PDE$$

$$\text{अतः } \angle B = \angle D \text{ — (5)}$$

$$\text{एवं } \angle C = \angle E \text{ — (6)}$$

समीकरण (2) से,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{PD}{PQ} = \frac{PE}{PR} \text{ [समी. 3 एवं 4 से]}$$

चुत्क्रम करने पर \rightarrow

$$\frac{PQ}{PD} = \frac{PR}{PE}$$

$$\frac{PQ}{PD} - 1 = \frac{PR}{PE} - 1$$

$$\frac{PQ - PD}{PD} = \frac{PR - PE}{PE}$$

$$\frac{DQ}{PD} = \frac{ER}{PE}$$

चुल्क्रम करने पर \rightarrow

$$\frac{PD}{DQ} = \frac{PE}{ER}$$

अतः थेलस प्रमेय के विलोम से,

$$DE \parallel PR$$

अतः संगत कोण बराबर होंगे,

$$\angle D = \angle Q \quad - (7)$$

$$\angle E = \angle R \quad - (8)$$

समीकरण (7) व (7) से \rightarrow

$$\angle B = \angle Q \rightarrow (9)$$

समीकरण (6) व (8) से \rightarrow

$$\angle C = \angle R \quad - (10)$$

समीकरण (1), (9) व (10) से.

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

(कोण - कोण - कोण समरूपता)

उदाहरण-4 आकृति में, यदि $PQ \parallel RS$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\triangle POQ \sim \triangle SOR$ हैं।

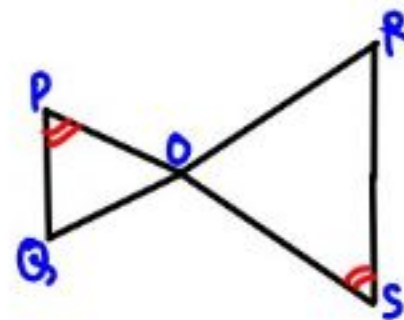
हल - $\because PQ \parallel RS$ अतः

$$\angle QPS = \angle RSP \text{ (एकान्तर कोण)}$$

$$\text{तथा } \angle PQR = \angle SRQ \text{ (एकान्तर कोण)}$$

अतः कोण - कोण समरूपता प्रमेय से,

$$\triangle POQ \sim \triangle SOR$$

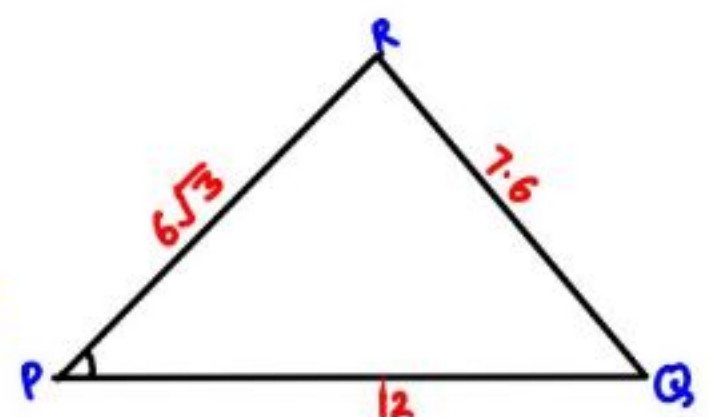
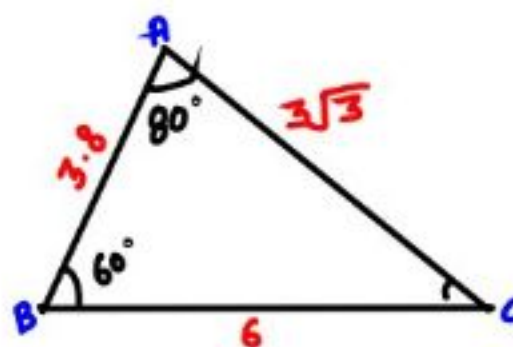


उदाहरण-5 आकृति में $\angle P$ ज्ञात कीजिए।

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AC}{RP} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AB}{RQ} = \frac{AC}{RP}$$

अतः भुजा-भुजा-भुजा समरूपता से,

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$

अतः संगत कोण बराबर होंगे।

$$\angle P = \angle C \quad \text{--- ①}$$

ΔABC में,

$$\text{कोणों का योग} = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$30^\circ + 60^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$140^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 40^\circ$$

समीकरण ① से \rightarrow

$$\angle P = 40^\circ$$

उदाहरण-6 आकृति में $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ है दर्शाइए कि $\angle A = \angle C$ तथा $\angle B = \angle D$ है।

दिया है:-

$$(OA) \cdot (OB) = (OC) \cdot (OD)$$

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} \quad \text{--- ①}$$

$$\angle AOD = \angle COB \quad (\text{गोर्धमिमुख कोण})$$

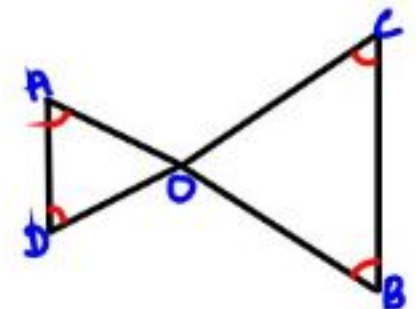
अतः भुजा-कोण-भुजा समरूपता से,

$$\Delta AOD \sim \Delta COB$$

अतः संगत कोण समान होंगे।

$$\angle A = \angle C$$

$$\text{एवं } \angle B = \angle D$$



उदाहरण-7 90 cm लम्बाई वाली एक लड़की बल्ब लगे एक खम्भे के आधार से परे 1.2 m/sec की चाल से चल रही है। यदि बल्ब छवि से 3.6 cm की ऊँचाई पर है, तो 4 सेकंड बाद उस लड़की की छाया की लम्बाई ज्ञात करो।

हल-

$$\Delta ABC \text{ \& } PQC,$$

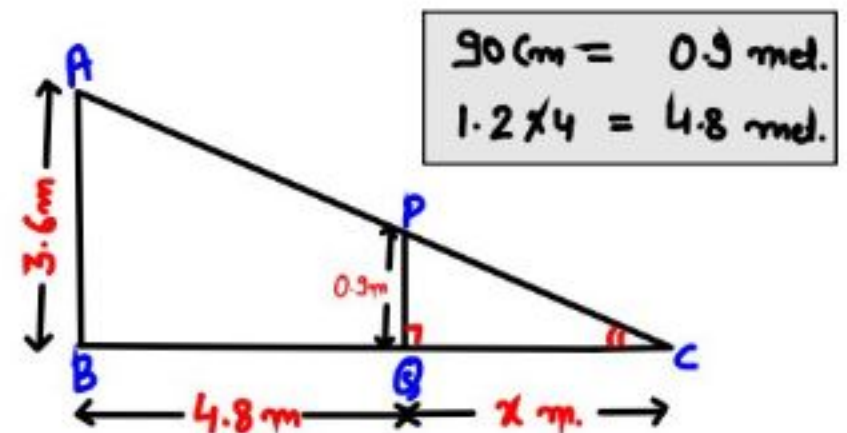
$$\angle ABC = \angle PQC = 90^\circ$$

$$\text{एवं } \angle ACB = \angle PCQ \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

अतः कोण-कोण समरूपता प्रमेय से,

$$\Delta ABC \sim \Delta PQC$$

अतः भुजाओं का अनुपात समान होगा।



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\frac{3.6}{9} = \frac{4.8 \times x}{x}$$

$$4 = \frac{4.8 + x}{x}$$

$$4x = 4.8 + x$$

$$4x - x = 4.8$$

$$3x = 4.8$$

$$x = \frac{4.8}{3}$$

$$x = 1.6 \text{ m.}$$

उदाहरण-8 आकृति में CM और RN क्रमशः $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ की माध्यिकाएँ हैं। यदि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ हैं तो सिद्ध कीजिए कि,

(i) $\triangle AMC \sim \triangle PNR$

हल-

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle PQR$

अतः संगत कोण समान तथा संगत भुजाएँ समानुपाती होगी।

$$\angle A = \angle P - (1)$$

$$\angle B = \angle Q - (2)$$

$$\angle C = \angle R - (3)$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} - (4)$$

$\therefore CM$ एवं RN माध्यिकाएँ हैं अतः

$$AM = BM \rightarrow (5)$$

$$QN = PN \rightarrow (6)$$

(i) समीकरण (4) से,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

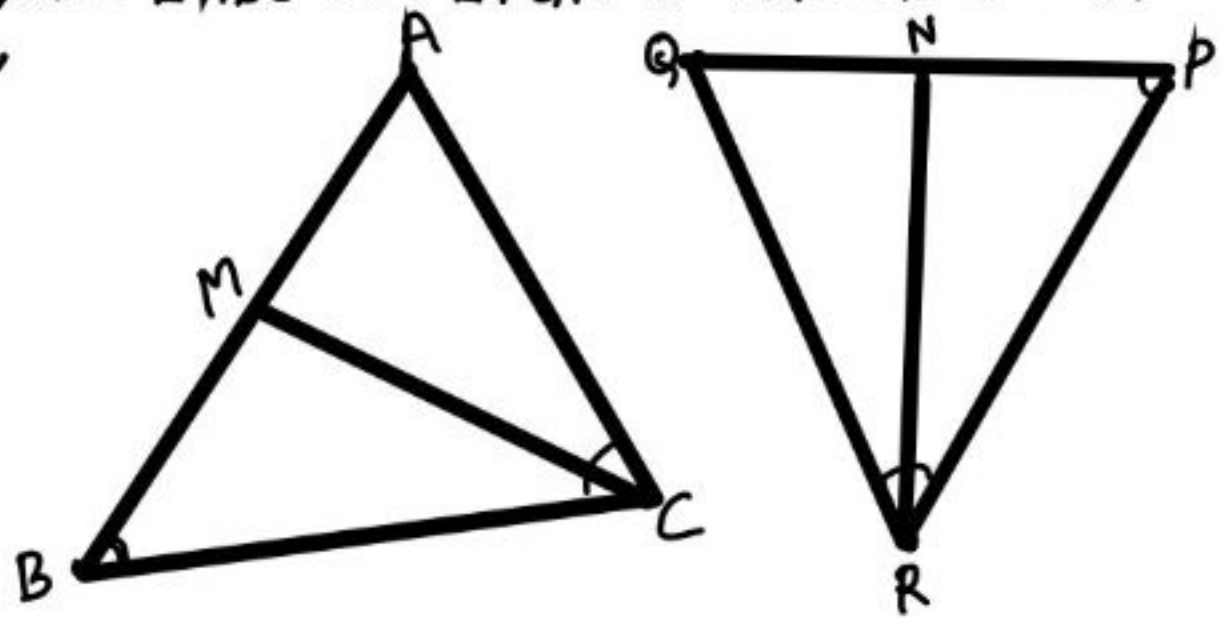
$$\frac{2AM}{2PM} = \frac{AC}{PR}$$

$$\frac{AM}{PN} = \frac{AC}{PR} - (7)$$

समीकरण (1) व (7) से \rightarrow

$$\triangle AMC \sim \triangle PNR$$

(भुजा-कोण-भुजा समरूपता से)



$$(ii) \frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$$

अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होगी,

$$\frac{CM}{RN} = \frac{AM}{PN}$$

$$\frac{CM}{RN} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}PQ}$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$$

$$(iii) \triangle CMB \sim \triangle RNQ$$

समीकरण (i) से,

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\frac{2BM}{2QN} = \frac{BC}{QR}$$

$$\boxed{\frac{BM}{QN} = \frac{BC}{QR}} \quad - (8)$$

समीकरण (2) व (8) से →

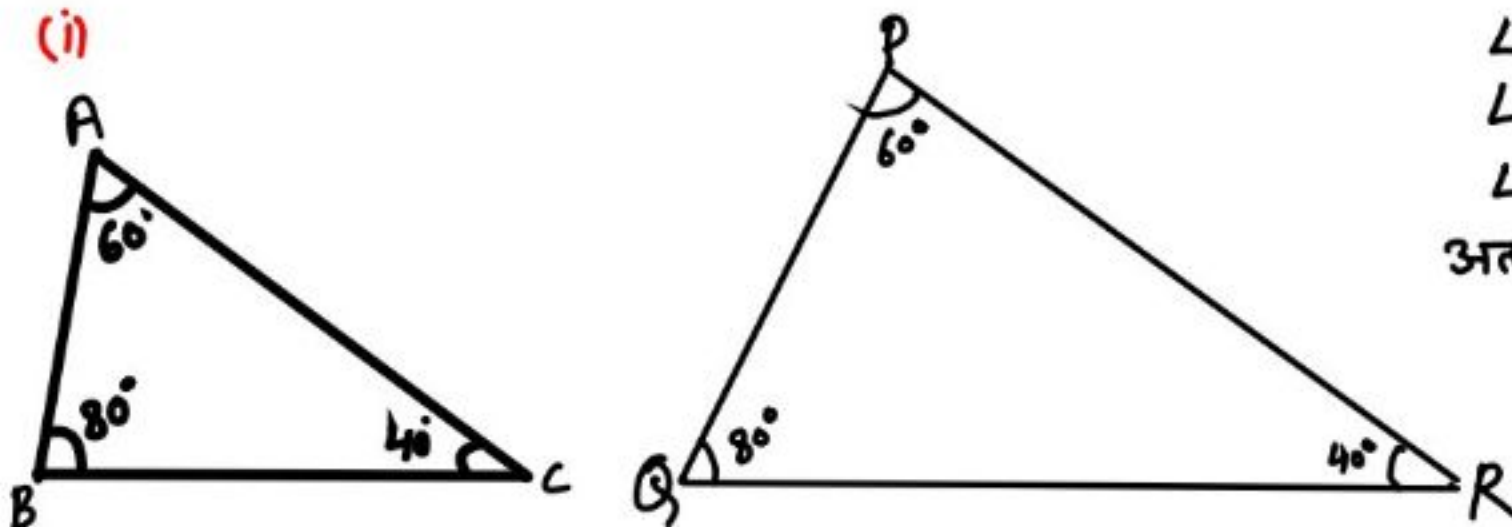
$$\triangle CMB \sim \triangle RNQ$$

(भुजा-कोण-भुजा समरूपता से)

प्रश्नावली 6.3

प्रश्न-1 बताइए कि आकृति में दिए त्रिभुजों के युग्मों में से कौन-कौन से युग्म समरूप हैं ?

(i)



$$\angle A = \angle P$$

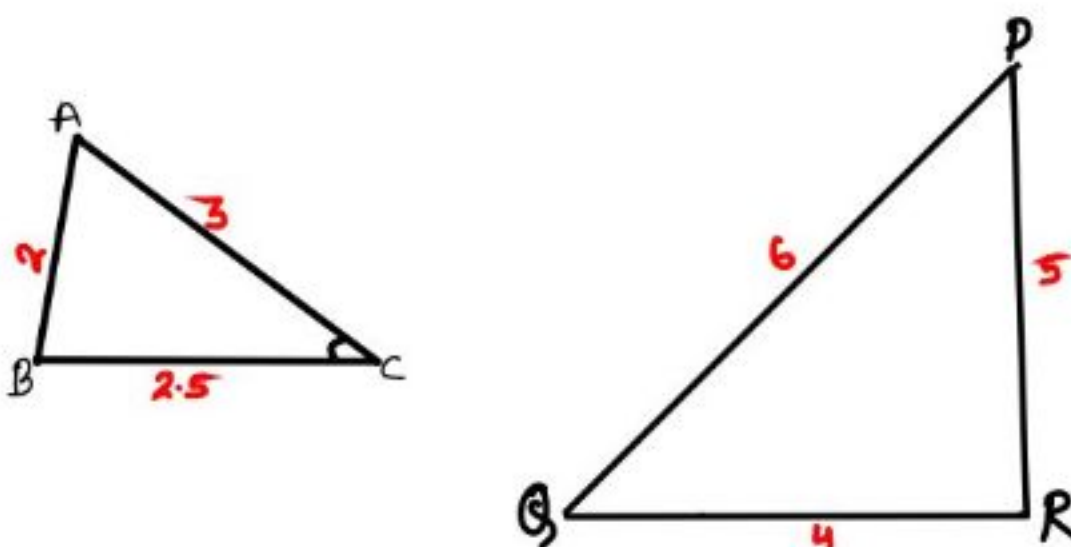
$$\angle B = \angle Q$$

$$\angle C = \angle R$$

अतः कोण-कोण-कोण समरूपता से,

$$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$$

(ii)

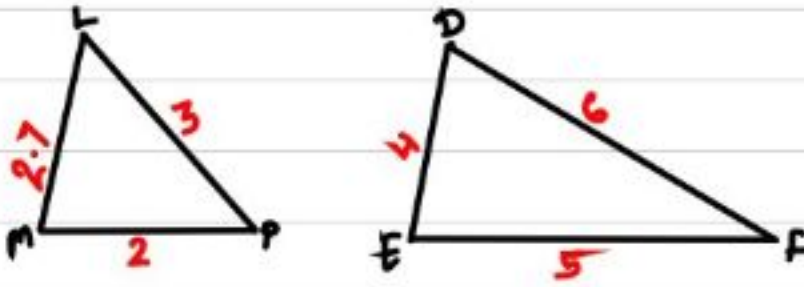


$$\frac{AB}{QR} = \frac{AC}{PQ} = \frac{BC}{PR} = \frac{1}{2}$$

अतः भुजा-भुजा-भुजा समरूपता से,

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR$$

(iii)

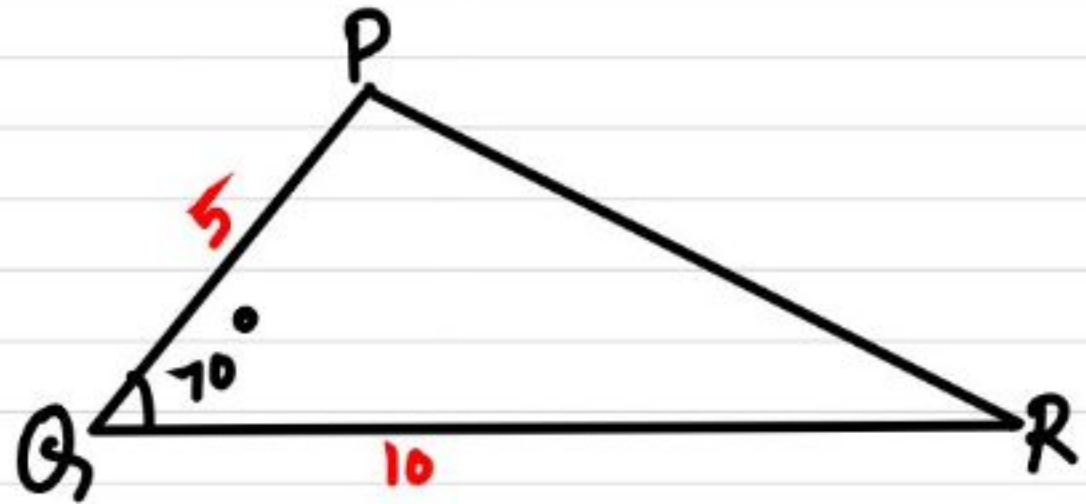
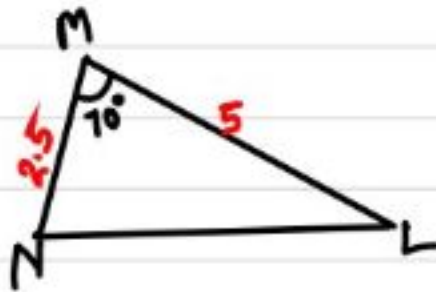


$$\frac{JP}{JE} = \frac{LP}{JF} \neq \frac{LM}{EF}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{2.7}{5}$$

अतः दोनों त्रिभुज समरूप नहीं हैं।

(iv)



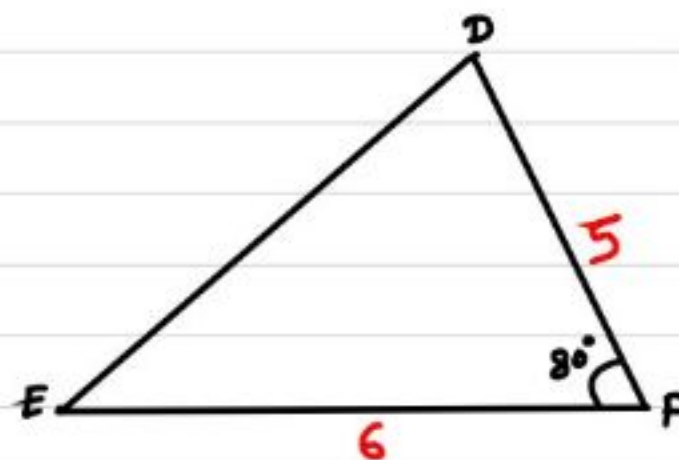
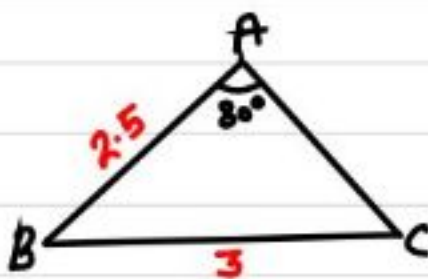
$$\frac{MN}{PQ} = \frac{ML}{QR} = \frac{1}{2}$$

$$\text{तथा } \angle NML = \angle PQR$$

अतः भुजा-कोण-भुजा समरूपता से,

$$\Rightarrow \Delta MNL \sim \Delta PQR$$

(v)

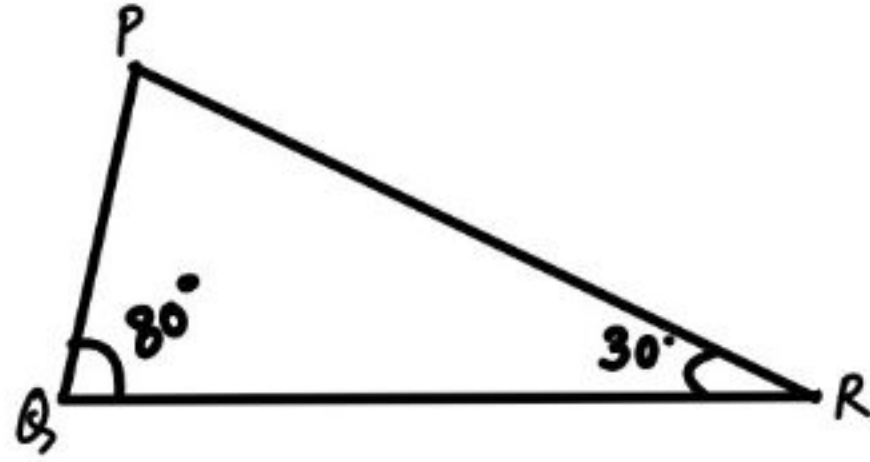
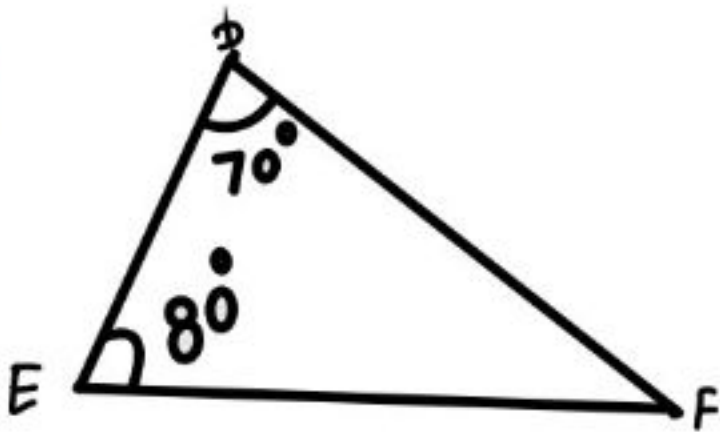


$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$\angle ABC \neq \angle DEF$$

अतः समरूप नहीं है।

(vi)



ΔDEF में, कोणों का योग = 180°
 $\angle D + \angle E + \angle F = 180^\circ$
 $70^\circ + 80^\circ + \angle F = 180^\circ$
 $150^\circ + \angle F = 180^\circ$

$$\angle F = 30^\circ$$

$$\angle E = \angle Q$$

$$\text{एवं } \angle F = \angle R$$

अतः कोण-कोण समरूपता से,

$$\Delta DEF \sim \Delta PQR$$

प्रश्न-2 आकृति में $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ हैं। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।

हल:- $\angle DOC + \angle BOC = 180^\circ$ (रैखिक कोण)
 $\angle DOC + 125^\circ = 180^\circ$
 $\angle DOC = 55^\circ$

ΔODC में,

$$\begin{aligned} \text{कोणों का योग} &= 180^\circ \\ \Rightarrow 70^\circ + 55^\circ + \angle DCO &= 180^\circ \\ \Rightarrow 125^\circ + \angle DCO &= 180^\circ \\ \Rightarrow \angle DCO &= 180^\circ - 125^\circ \end{aligned}$$

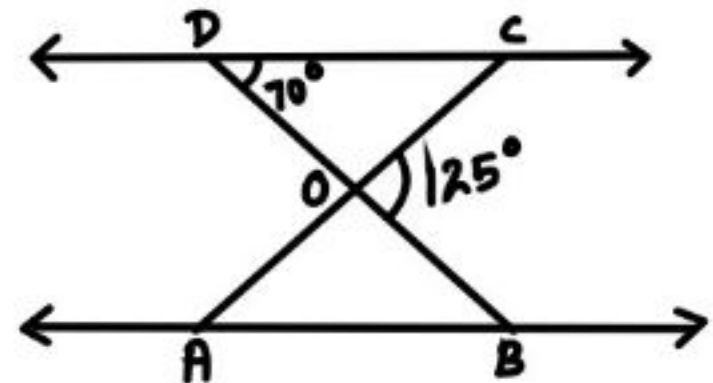
$$\Rightarrow \angle DCO = 55^\circ$$

$$\therefore \Delta ODC \sim \Delta OBA$$

अतः संगत कोण बराबर होंगे,

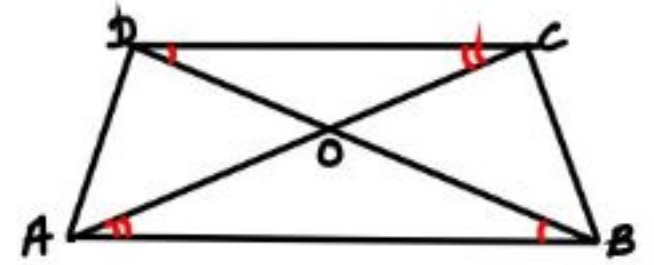
$$\angle OAB = \angle DCO$$

$$\angle OAB = 55^\circ$$



प्रश्न-3 समलम्ब $ABCD$, जिसमें $AB \parallel DC$ हैं, के विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए दर्शाइए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ हैं।

हल:- $\triangle OAB$ और $\triangle OCD$ में,
 $AB \parallel DC$ अतः,
 $\angle OCA = \angle OAB$ (एकान्तर कोण)
 $\angle ODA = \angle OBD$ (एकान्तर कोण)



अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD$$

अतः भुजाओं का अनुपात समान होगा,

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

प्रश्न-4 आकृति में $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ हैं। दर्शाइए कि $\triangle PQS \sim \triangle TQR$ हैं।

हल:- $\triangle PQR$ में,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore PQ = PR \quad \text{--- (1)}$$

(समान कोणों के सामने वाली भुजाएँ समान होती हैं)

दिया है:-

$$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$$

$$\Rightarrow \frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PQ} \rightarrow \textcircled{2} \quad (\text{समीकरण 1 से})$$

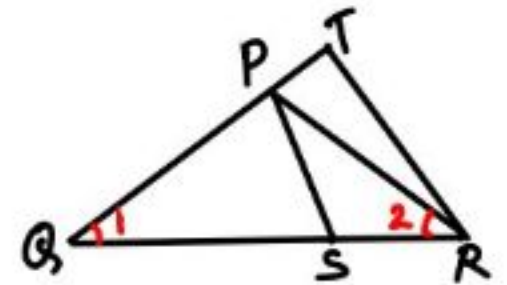
$\triangle PQS$ तथा $\triangle TQR$ में,

$$\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PQ} \quad (\text{समीकरण 2 से})$$

एवं $\angle 1 = \angle 1$ (उभयनिष्ठ)

अतः भुजा-कोण-भुजा समरूपता कसौटी से,

$$\triangle PQS \sim \triangle TQR$$



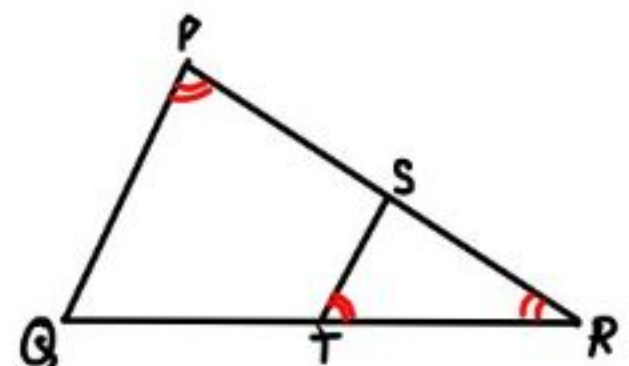
प्रश्न-5 $\triangle PQR$ की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिन्दु S और T इस प्रकार हैं कि $LP = \angle RTS$ हैं। दर्शाइए कि $\triangle RPQ \sim \triangle RTS$ हैं।

हल:-

$\triangle RPQ$ एवं $\triangle RTS$ में,

$$\angle P = \angle RTS \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle R = \angle R \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$



अतः कोण-कोण समरूपता से,

$$\Delta RPQ \sim \Delta RTS$$

प्रश्न-6 आकृति में यदि $\Delta ABC \cong \Delta ACD$ हैं तो, दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ हैं।

हल:- $\therefore \Delta ABE \cong \Delta ACD$

अतः संगत कोण एवं संगत भुजाएँ समान होगी।

$$\Rightarrow AB = AC - (1)$$

$$\Rightarrow AD = AE - (2)$$

समीकरण (1) \div समीकरण (2) \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} - (3)$$

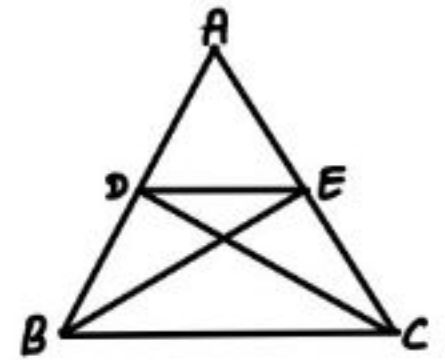
$$\Delta ADE \text{ व } \Delta ABC \text{ में,}$$

$$\angle A = \angle A - (4) \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

समीकरण (3) व (4) से,

$$\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

(भुजा-कोण-भुजा समरूपता कसौटी से)



प्रश्न-7 आकृति में ΔABC के शीर्षलम्ब AD और CE परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि :

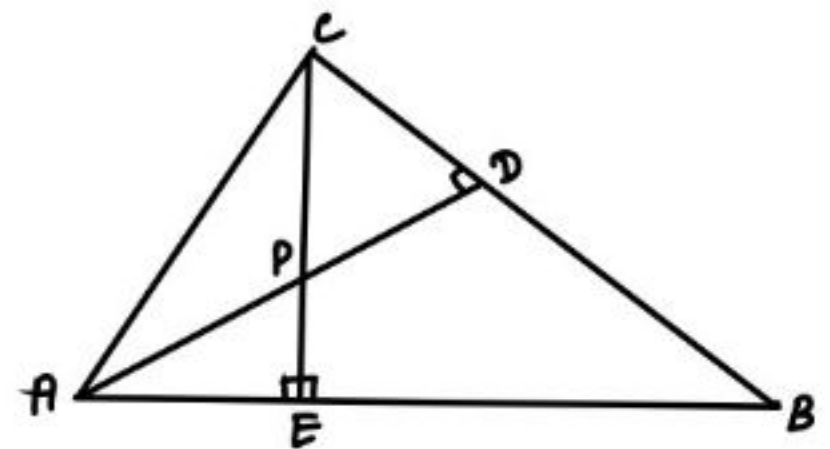
(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

$$\angle D = \angle E (90^\circ)$$

एवं $\angle CPD = \angle APE$ (शीर्षाभिमुख कोण)

कोण-कोण समरूपता कसौटी से

$$\Delta AEP \sim \Delta CDP$$



(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

$$\angle B = \angle B \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$\angle D = \angle E = 90^\circ$$

कोण-कोण समरूपता से

$$\Delta ABD \sim \Delta CBE$$

(iii) $\triangle AEP \sim \triangle ADB$

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

$\angle D = \angle E = 90^\circ$

कोण - कोण समरूपता से

$\triangle AEP \sim \triangle ADB$

(iv) $\triangle PDC \sim \triangle BEC$

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

$\angle D = \angle E = 90^\circ$

कोण - कोण समरूपता से

$\triangle PDC \sim \triangle BEC$

प्रश्न-8 समान्तर-चतुर्भुज $ABCD$ की बढ़ाई गई भुजा AD पर स्थित E एक बिन्दु है तथा BE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि, $\triangle ABE \sim \triangle CFB$ है।

हल:-

$\therefore AE \parallel BC$

$\therefore \angle AEB = \angle CBF \rightarrow (1)$ (एकान्तर कोण)

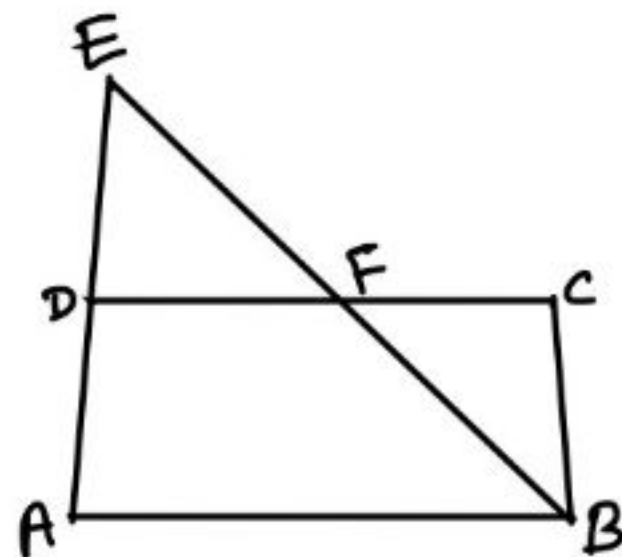
$\therefore ABCD$ समान्तर-चतुर्भुज है

$\therefore \angle A = \angle C \rightarrow (2)$

समीकरण (1) व (2) से,

$\triangle ABE \sim \triangle CFB$

(कोण - कोण समरूपता कसौटी से)



प्रश्न-9 आकृति में ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\triangle ABC \sim \triangle AMP$

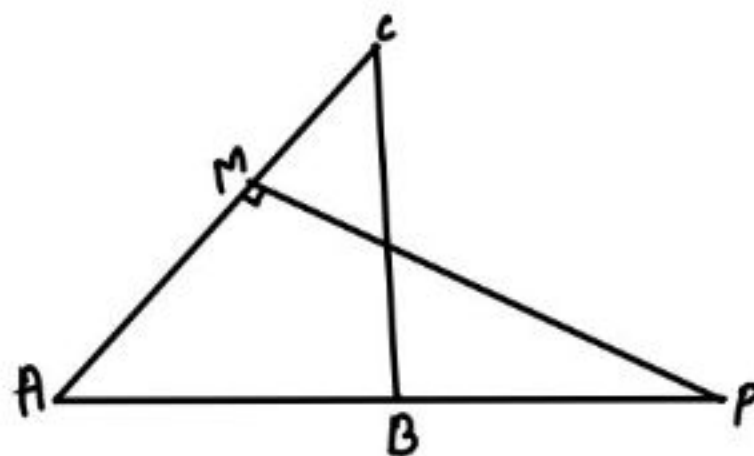
$\triangle ABC$ और $\triangle AMP$ में,

$\angle B = \angle M = 90^\circ$ (दिया है)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

अतः कोण - कोण समरूपता कसौटी से,

$\triangle ABC \sim \triangle AMP$



$$(ii) \frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$$

कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\triangle ABC \sim \triangle AMP$$

अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होंगी,

$$\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$$

प्रश्न-10 CD और GH क्रमशः $\triangle ACB$ और $\triangle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिन्दु D और H क्रमशः $\triangle ABC$ और $\triangle FEG$ की भुजाओं AB और EF पर स्थित हैं। यदि $\triangle ABC \sim \triangle FEG$ है, तो दर्शाइए कि:

$$(i) \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$$

दिया है:-

(i) CD और GH , $\triangle ACB$ और $\triangle EGF$ के समद्विभाजक हैं।

$$\text{अतः } \angle ACD = \angle BCD = x \text{ (माना)} \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{तथा } \angle EGH = \angle FGH = y \text{ (माना)} \quad \text{--- (2)}$$

(ii) $\triangle ABC \sim \triangle FEG$ अतः

संगत कोण समान तथा संगत भुजाएँ समानुपाती होंगी।

$$\angle A = \angle F \quad \text{--- (3)}$$

$$\angle B = \angle E \quad \text{--- (4)}$$

$$\angle C = \angle G \Rightarrow 2x = 2y$$

$$\boxed{x = y} \quad \text{--- (5)}$$

(i) कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\triangle DCA \sim \triangle HGF$$

अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होंगी,

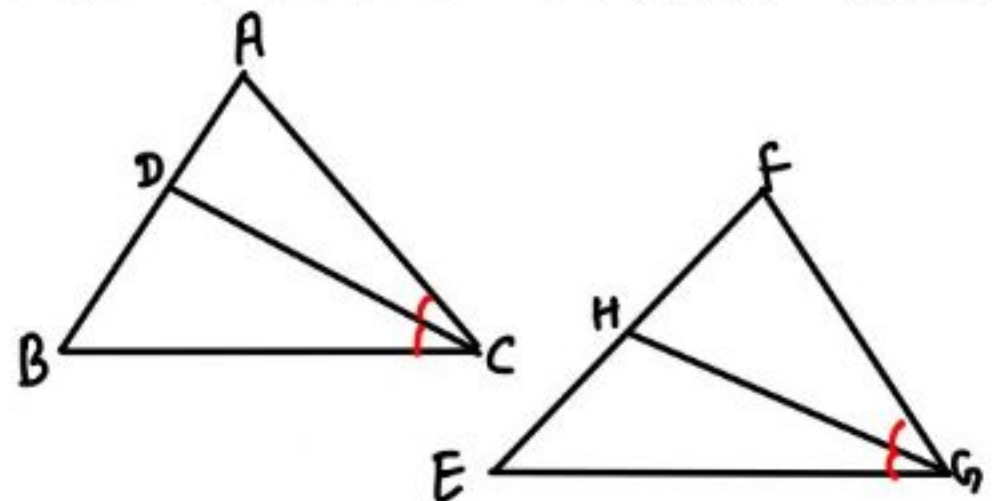
$$\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$$

(ii) $\triangle DCB \sim \triangle HGE$

$\triangle DCB$ और $\triangle HGE$ में

$$\angle B = \angle E \quad (\text{समीकरण 4 से})$$

$$\angle BCD = \angle GEH \quad (\text{समीकरण 5 से})$$



अतः कोण-कोण समरूपता से,

$$\triangle DCB \sim \triangle HGE$$

(ii) $\triangle DCA \sim \triangle HGF$

$\triangle DCA$ और $\triangle HGF$ में,

$$\angle A = \angle F \text{ (समीकरण 3 से)}$$

$$\angle ACD = \angle FGH$$

$$\Rightarrow x = y \text{ [समीकरण 5 से]}$$

अतः कोण-कोण समरूपता से,

$$\triangle DCA \sim \triangle HGF$$

प्रश्न-11 आकृति में $AB = AC$ वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बढ़ाई गई भुजा CB पर स्थित E एक बिन्दु है। यदि $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $\triangle ABD \sim \triangle ECF$ है।

हल:- $\triangle ABC$ में,

$$\text{दिया है, } AB = AC \text{ --- (1)}$$

$$\text{अतः } \angle B = \angle C \text{ --- (2)}$$

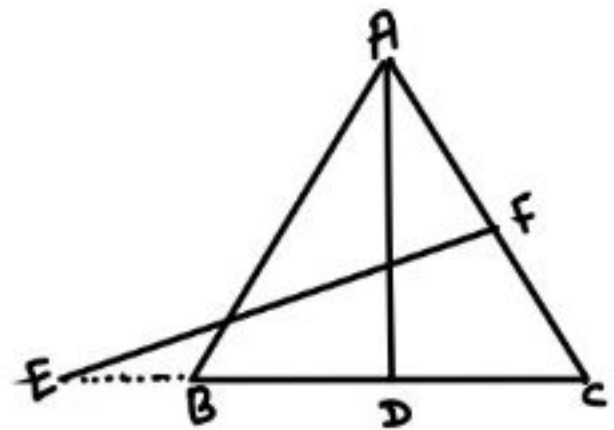
$\triangle ABD$ व $\triangle ECF$ में

$$\angle D = \angle F = 90^\circ \text{ (दिया है)}$$

$$\angle B = \angle C \text{ [समीकरण 2 से]}$$

अतः कोण-कोण समरूपता से,

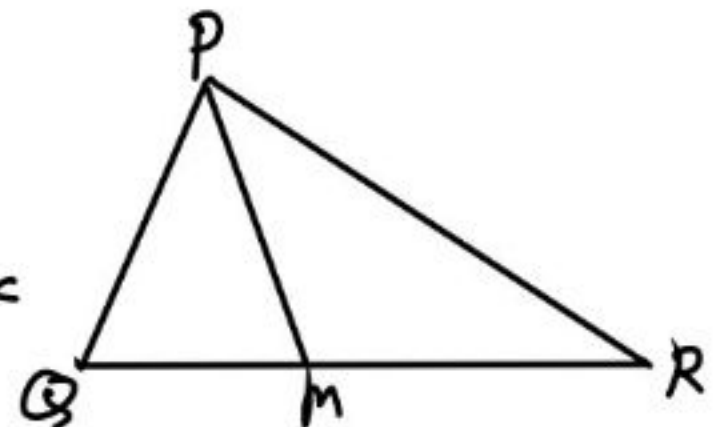
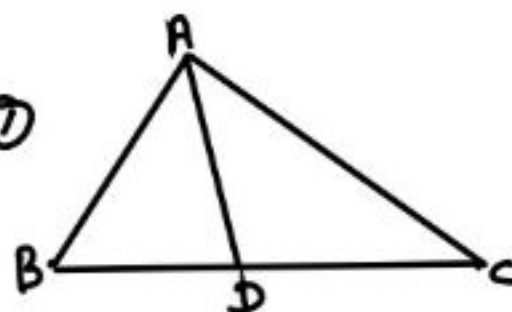
$$\triangle ABD \sim \triangle ECF$$



प्रश्न-12 एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AD एक अन्य $\triangle PQR$ की क्रमशः भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PM के समानुपाती हैं। दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ है।

हल:-

$$\text{दिया है:- (i) } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AD}{PM} \text{ --- (1)}$$



(ii) AD , $\triangle ABC$ की माध्यिका है

$$\text{अतः } BD = CD$$

$$\text{या } BC = 2BD \text{ --- (2)}$$

(iii) PM , $\triangle PQR$ की माध्यिका है

$$\text{अतः } QM = MR$$

$$\text{या } QR = 2QM \text{ --- (3)}$$

समीकरण ① में BC व QR का मा —ने पर \rightarrow २५

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{2(BD)}{2(QM)} = \frac{AD}{PM}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} = \frac{AD}{PM}}$$

अतः भुजा भुजा-भुजा समरूपता से,

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle PQM$$

अतः संगत कोण समान होंगे।

$$\Rightarrow \text{अतः } \angle B = \angle Q \text{ — (५)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ व } \triangle PQR \text{ में,}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} \text{ [समी. ① से]}$$

$$\Rightarrow \text{व } \angle B = \angle Q \text{ [समी. ⑤ से]}$$

अतः भुजा-कोण-भुजा समरूपता से,

$$\Rightarrow \boxed{\triangle ABC \sim \triangle PQR}$$

प्रश्न-13 एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$ हैं दर्शाइए कि $CA^2 = CB \cdot CD$ हैं।

हल:-

$\triangle ABC$ व $\triangle ADC$ में,

$$\Rightarrow \angle ADC = \angle BAC \text{ (दिया है)}$$

$$\text{व } \angle C = \angle C \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

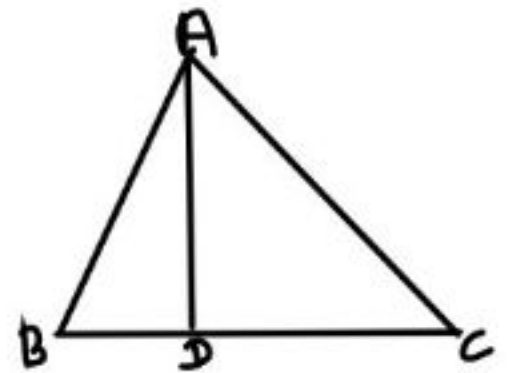
$$\Rightarrow \text{अतः कोण-कोण समरूपता से,}$$

$$\Rightarrow \boxed{\triangle ABC \sim \triangle ADC}$$

$$\Rightarrow \text{अतः भुजाओं का अनुपात समान होगा,}$$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$$

$$\Rightarrow \boxed{(CA)^2 = (CB)(CD)}$$



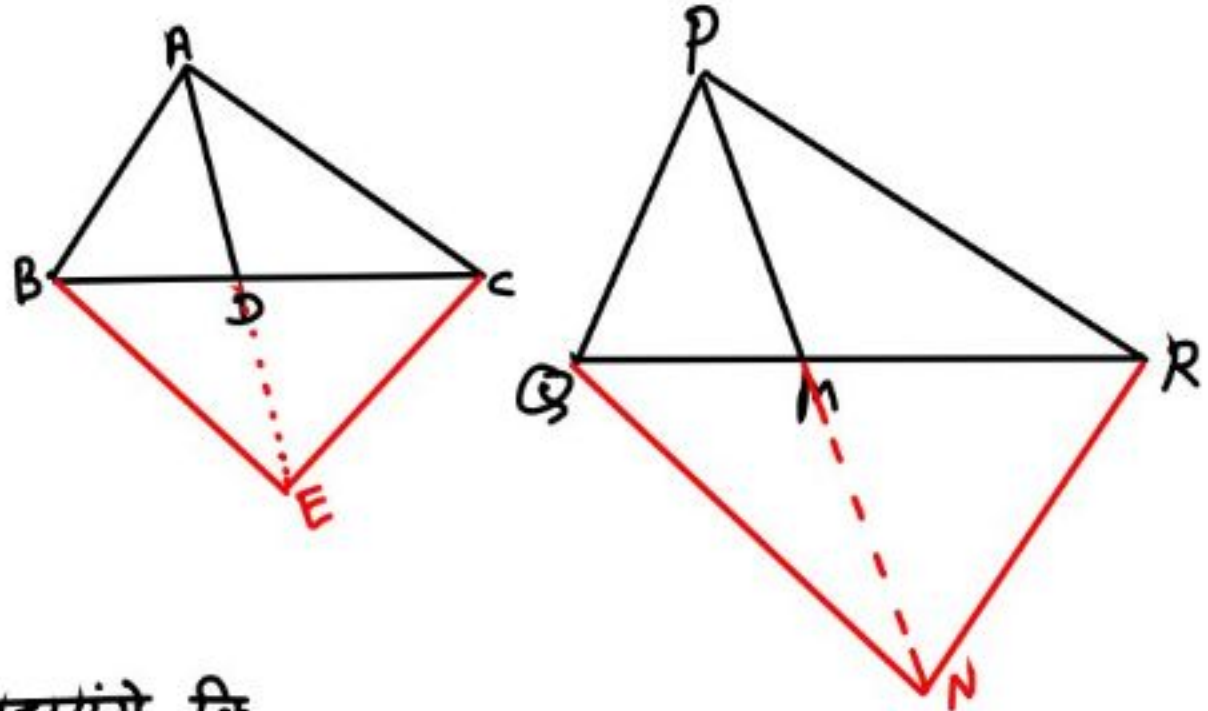
प्रश्न - 14 एक त्रिभुज ABC की भुजाएँ AB और AC तथा माध्यिका AD एक अन्य त्रिभुज की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के क्रमशः समानुपाती हैं। दर्शाइए कि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ हैं।
हल :-

दिया है :- (i) $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$ - (1)

(ii) AD , $\triangle ABC$ की तथा PM , $\triangle PQR$ की माध्यिका हैं।

\Rightarrow अतः $BD = DC$ - (2)

\Rightarrow तथा $QM = MR$ - (3)



रचना :- AD को E तक इस प्रकार बढ़ाएंगे कि,

$\Rightarrow AD = DE$ - (4)

$\Rightarrow PM$ को N तक इस प्रकार बढ़ाएंगे कि,

$PM = MN$ - (5)

D बिन्दु AE तथा BC को समद्विभाजित करता है तथा M बिन्दु PN और QR को समद्विभाजित करता है अतः $ABEC$ तथा $PQNR$ समान्तर चतुर्भुज हैं।

अतः इनकी आगे-आगे की भुजाएँ समान होंगी।

$AC = BE$ - (6)

तथा $PR = QN$ - (7)

समीकरण (1) से \rightarrow

$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PM}$

$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BE}{QN} = \frac{\frac{AE}{2}}{\frac{PN}{2}}$

$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BE}{QN} = \frac{AE}{PN}$ - (8)

$AD = \frac{AE}{2}$
 $PM = \frac{PN}{2}$

\Rightarrow अतः भुजा - भुजा - भुजा समरूपता से,

$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle PQN$

\Rightarrow अतः संगत कोण समान होंगे,

$\Rightarrow \angle BAD = \angle QPM \rightarrow (9)$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि,

$$\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle PRN$$

\Rightarrow अतः संगत कोण बराबर होंगे।

$$\Rightarrow \angle CAD = \angle RPM \rightarrow (10)$$

समीकरण 9 + समीकरण 10 \rightarrow

$$\Rightarrow \angle BAD + \angle CAD = \angle QPM + \angle RPM$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle P \rightarrow (11)$$

समीकरण 11 से \rightarrow

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

\Rightarrow अतः भुजा-कोण-भुजा समरूपता से,

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

प्रश्न-15 लम्बाई 6m वाले एक उर्ध्वाधर स्तम्भ की धर्मि पर छाया की लम्बाई 4m हैं, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 28m हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:- $\triangle ABC$ व PQR में,

$$\angle B = \angle Q = 90^\circ$$

$$\angle C = \angle R$$

अतः कोण-कोण समरूपता से \rightarrow

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

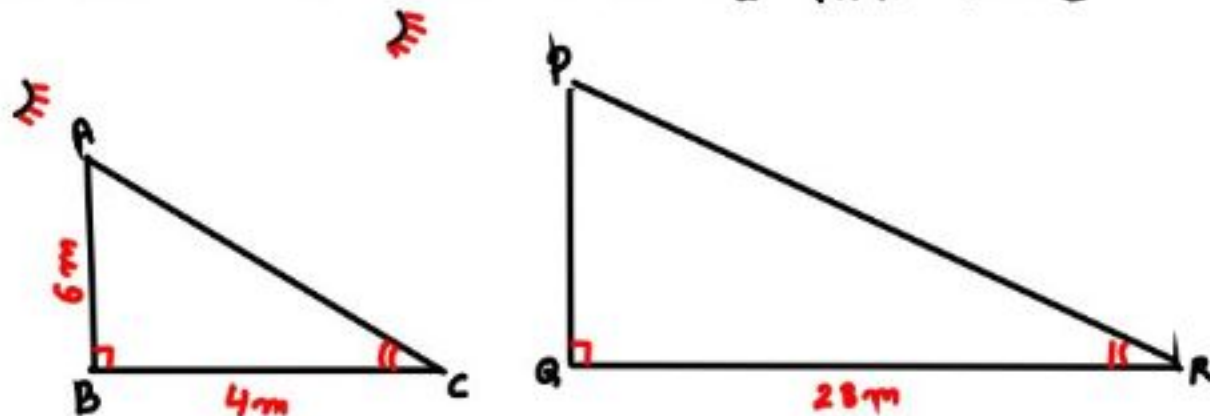
अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होंगी।

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{PQ} = \frac{4}{28}$$

$$\Rightarrow 42 = PQ$$

$$\boxed{PQ = 42 \text{ मी.}}$$



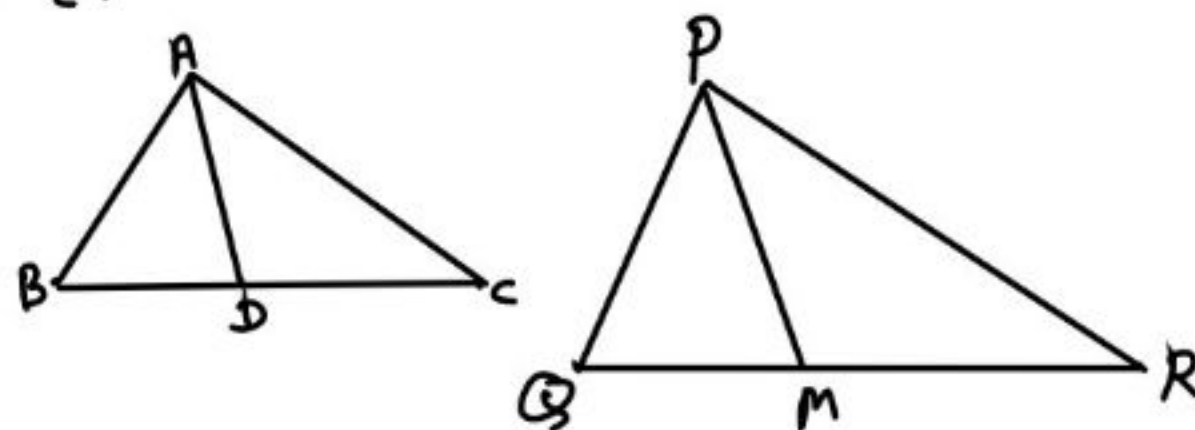
प्रश्न-16 AD और PM त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएँ हैं, जबकि $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ हैं। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ हैं।

हल:-

\therefore AD व PM $\triangle ABC$ व $\triangle PQR$ की माध्यिकाएँ हैं

$$\text{अतः } BD = DC \rightarrow (1)$$

$$\text{व } QM = MR \rightarrow (2)$$



$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

\therefore संगत कोण समान व संगत भुजाएँ समानुपाती होगी ।

$$\Rightarrow \angle B = \angle Q \quad - (3)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{2(BD)}{2(QM)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM} \quad - (4)$$

समीकरण (3) व (4) से \rightarrow

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle PQM$$

\Rightarrow भुजा - कोण - भुजा समरूपता से

\Rightarrow अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होगी ।

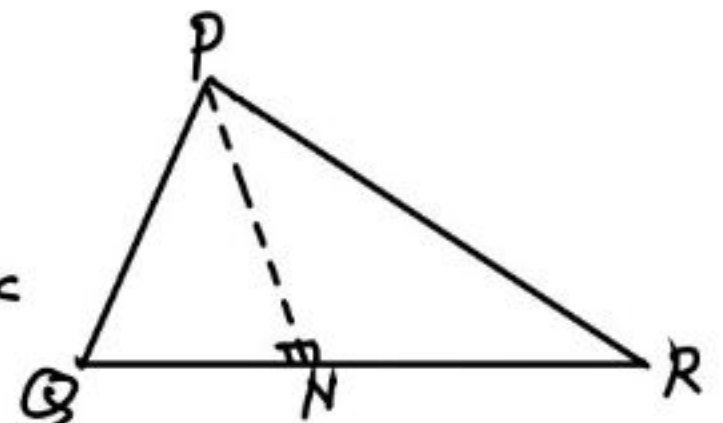
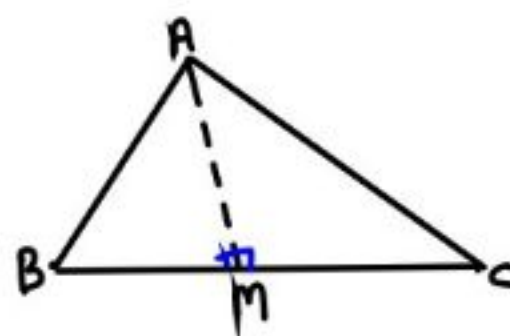
$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$$

प्रमेय 6.6

कथन: दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है ।

हल:-
दिया है:-

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$



सिद्ध करना है:-

$$\Rightarrow \frac{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

रचना:-

A से भुजा BC तथा P से भुजा QR पर लम्ब AM तथा PN डाला ।

$$\Rightarrow \text{अतः } \angle M = \angle N = 90^\circ \quad - (1)$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times BC \times AM \quad - (2)$$

$$\Rightarrow \Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\Rightarrow \Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times QR \times PN - (3)$$

$$\frac{\text{समीकरण (2)}}{\text{समीकरण (3)}} \Rightarrow \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AM}{PN} - (4)$$

$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

\Rightarrow अतः संगत कोण समान तथा संगत भुजाएँ समानुपाती होगी।

$$\Rightarrow \angle B = \angle Q - (5)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} - (6)$$

ΔABM तथा ΔPQN में,

$$\Rightarrow \angle B = \angle Q \text{ [समी. (5) से]}$$

$$\angle M = \angle N \text{ [समी. (1) से]}$$

\Rightarrow अतः कोण-कोण समरूपता से,

$$\Delta ABM \sim \Delta PQN$$

अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होगी।

$$\Rightarrow \frac{AP}{PQ} = \frac{AM}{PN} - (7)$$

समीकरण (4) में समीकरण (6) व (7) से मान रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AM}{PN}$$

$$= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ}$$

$$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$$

\Rightarrow अतः समीकरण (6) व (8) से \rightarrow

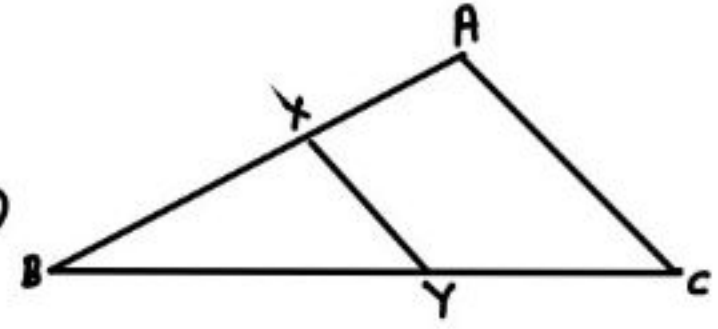
$$\Rightarrow \frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

उदाहरण-9 आकृति में, रेखाखण्ड XY $\triangle ABC$ की भुजा AC के समान्तर है तथा इस त्रिभुज को वह वरान्तर क्षेत्रफलों वाले दो भागों में विभाजित करता है। अनुपात $\frac{AX}{AB}$ ज्ञात कीजिए।
हल:-

दिया है:- (i) $AC \parallel XY$

(ii) $\triangle XYB$ का क्षेत्रफल = चतुर्भुज $ACYX$ का क्षेत्रफल

अतः $\triangle XYB$ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} (\triangle ABC)$ का क्षेत्रफल - (1)



$$\Rightarrow \frac{AX}{AB} = ??$$

$$\because AC \parallel XY$$

$$\therefore \angle X = \angle A \quad (\text{संगत कोण})$$

$$\text{तथा } \angle Y = \angle C \quad (\text{संगत कोण})$$

$$\text{अतः } \triangle ABC \sim \triangle XYB$$

(कोण-कोण समरूपता से)

$$\Rightarrow \frac{\triangle XYB \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{XB}{AB}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \times (\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल})}{(\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल})} = \left(\frac{XB}{AB}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{XB}{AB}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{XB}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{XB}{AB} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{XB - AB}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{-(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = \frac{-(AB - XB)}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{AX}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{AX}{AB} = \frac{(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AX}{AB} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

प्रश्नावली 6.4

प्रश्न-1 मान लीजिए $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ हैं और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 cm^2 तथा 121 cm^2 हैं। यदि $EF = 15.4 \text{ cm}$ हो, तो BC ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$\Rightarrow \because \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\Rightarrow \text{अतः } \frac{\triangle ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{64}{121} = \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2$$

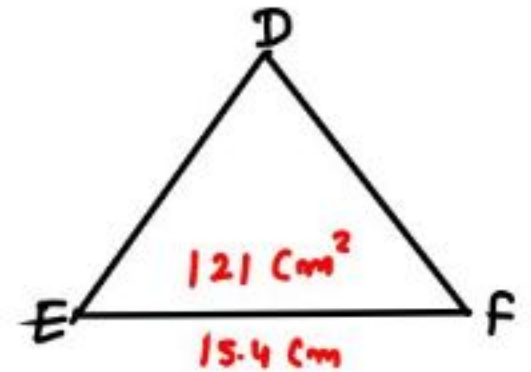
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{BC}{15.4}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

$$\Rightarrow \frac{8 \times 15.4}{11} = BC$$

$$\Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = \frac{112}{10}$$

$$\boxed{BC = 11.2 \text{ cm}}$$



प्रश्न-2 एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD जिसमें $AB \parallel CD$ हैं, के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $AB = 2CD$ हो तो त्रिभुजों AOB तथा COB के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

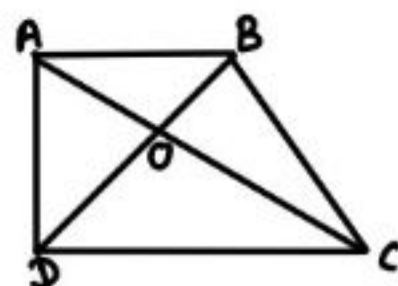
हल:- $\because AB \parallel CD$

$$\therefore \angle CDO = \angle OAB \text{ (एकान्तर कोण)}$$

$$\text{तथा } \angle DCO = \angle OBA \text{ (एकान्तर कोण)}$$

अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\triangle AOB \sim \triangle COB$$



$$\Rightarrow \text{अतः } \frac{\Delta AOB \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta COD \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left[\frac{2(CD)}{(CD)}\right]^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta AOB \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta COD \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left[\frac{2}{1}\right]^2$$

$$= \frac{4}{1} \Rightarrow \boxed{4!)$$

प्रश्न-3 आकृति में एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हुए हैं। यदि AD, BC को O पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि $\frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$ है।
हल:-

रचना:- A से BC पर लम्ब AM तथा D से BC पर लम्ब DN डाला।

$$\Rightarrow \text{ar}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\Rightarrow \text{ar}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AM \quad - (1)$$

$$\Rightarrow \text{ar}(\Delta DBC) = \frac{1}{2} \times BC \times DN \quad - (2)$$

$$\Rightarrow \frac{\text{समीकरण (1)}}{\text{समीकरण (2)}} \Rightarrow \frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DBC)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times BC \times DN}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DBC)} = \frac{AM}{DN} \quad - (3)$$

$$\Rightarrow \Delta AMO \text{ तथा } \Delta DNO \text{ में} \rightarrow$$

$$\angle M = \angle N = 90^\circ \text{ (रचना से)}$$

$$\angle AOM = \angle DON \text{ (शीर्षाभिमुख कोण)}$$

\Rightarrow अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

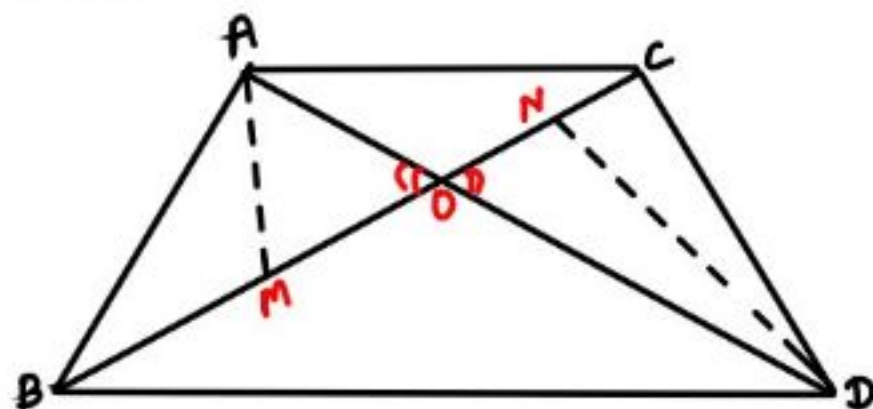
$$\Delta AMO \sim \Delta DNO$$

\Rightarrow अतः संगत भुजाओं का अनुपात समान होगा।

$$\Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{AO}{DO} \quad - (4)$$

समीकरण (4) से मान (3) में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}}$$

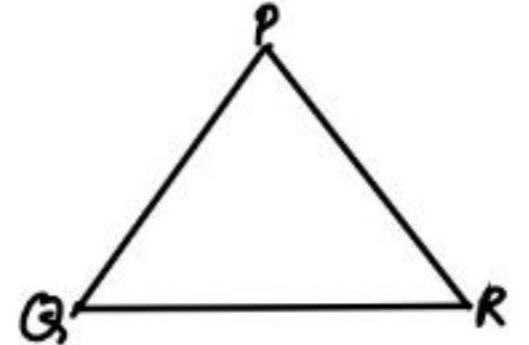
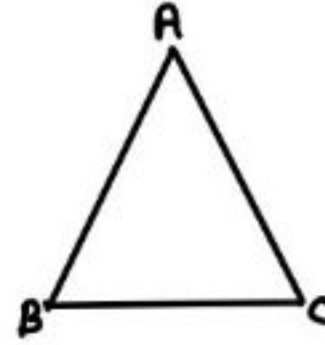


प्रश्न 4 यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

हल :-

दिया है :-

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \Delta ABC &\sim \Delta PQR \\ \text{अतः} \quad \angle A &= \angle P \rightarrow \textcircled{1} \\ \angle B &= \angle Q \rightarrow \textcircled{2} \\ \angle C &= \angle R \rightarrow \textcircled{3} \end{aligned}$$



$$\text{तथा} \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \quad \text{--- (4)}$$

$$\text{(ii)} \quad ar(\Delta ABC) = ar(\Delta PQR)$$

सिद्ध करना है :-

$$\begin{aligned} \Delta ABC &\cong \Delta PQR \\ AB &= PQ \\ BC &= QR \\ AC &= PR \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

$$\Rightarrow \therefore \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{ar(\Delta PQR)}{ar(\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{AC}{PR}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{AC}{PR}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = 1, \quad \frac{BC}{QR} = 1, \quad \frac{AC}{PR} = 1$$

$$\boxed{AB = PQ}, \quad \boxed{BC = QR}, \quad \boxed{AC = PR}$$

\Rightarrow अतः भुजा - भुजा - भुजा सर्वांगसमता प्रमेय से

$$\Rightarrow \boxed{\Delta ABC \cong \Delta PQR}$$

प्रश्न-5 एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E और F हैं। ΔDEF और ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल:- D, E, F भुजाओं AB, BC तथा CA के मध्य बिन्दु हैं
अतः मध्य बिन्दु प्रमेय से,
 $DF \parallel BC$

तथा $DE \parallel AC$ तथा $EF \parallel AB$

अतः $\triangle DEF$, $\triangle ECF$ तथा $\triangle FDE$
समान्तर चतुर्भुज होंगे

\Rightarrow अतः आमने-सामने के कोण समान होंगे।

$$\text{अतः } \angle DAF = \angle DEF$$

$$\text{तथा } \angle DBE = \angle DFE$$

$$\text{तथा } \angle ECF = \angle FDE$$

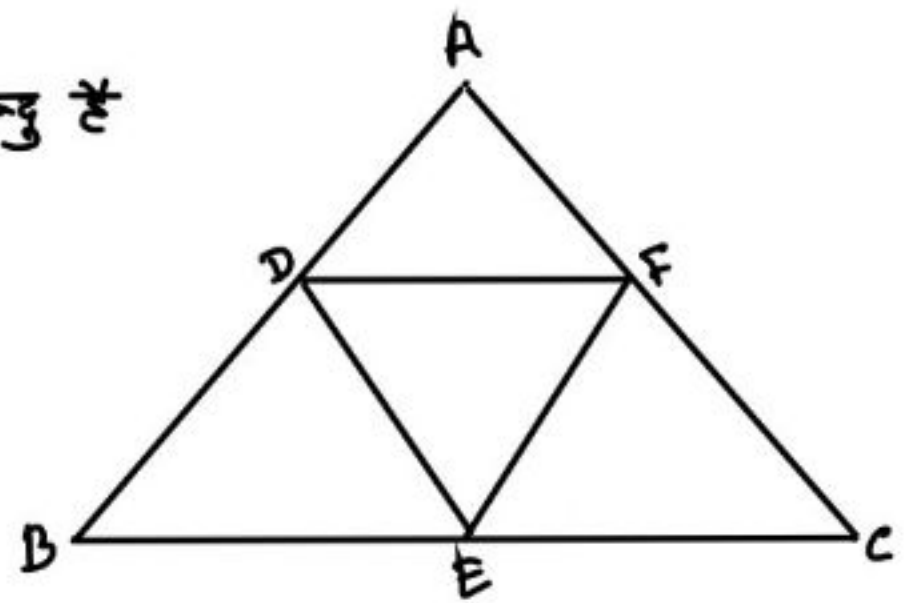
अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \text{अतः } \frac{\text{ar}(\triangle DEF)}{\text{ar}(\triangle ABC)} = \left(\frac{DF}{BC}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\triangle DEF)}{\text{ar}(\triangle ABC)} = \left[\frac{DF}{BC}\right]^2 \quad \left[\begin{array}{l} \text{मध्य बिन्दु प्रमेय से} \\ BC = 2(DF) \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\text{ar}(\triangle DEF)}{\text{ar}(\triangle ABC)} = \frac{1}{4}} \quad \text{अनुपात} = 1:4$$



प्रश्न-6 सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत माध्यिकाओं के संगत अनुपात का वर्ग होता है।

हल:-

दिया है:- $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

सिद्ध करना है:-

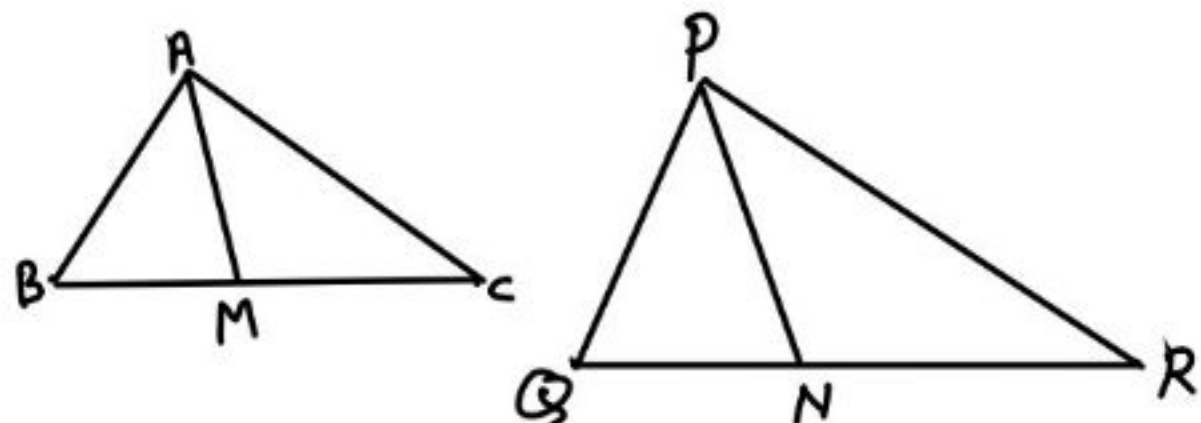
$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle PQR)} = \left(\frac{AM}{PN}\right)^2$$

$$\Rightarrow \because \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

\therefore संगत कोण समान तथा भुजाएँ समानुपाती होंगी।

$$\Rightarrow \angle B = \angle Q - (1)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$



$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{\frac{1}{2} BM}{\frac{1}{2} QN} \quad \left[\because M \text{ तथा } N, BC \text{ व } QR \text{ के मध्य बिन्दु हैं} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{QM}{QN}$$

अतः भुजा-कोण-भुजा समरूपता से,

$$\Delta ABM \sim \Delta PQN$$

अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होगी।

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AM}{PN} \quad - (3)$$

$$\Rightarrow \because \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

$$\Rightarrow \text{अतः } \frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ} \right)^2 \quad - (4)$$

समीकरण (3) से मान (4) में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\Delta ABC)}{\text{ar}(\Delta PQR)} = \left(\frac{AM}{PN} \right)^2$$

प्रश्न-7 सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

हल:-

सिद्ध करना है, ΔABP का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (ΔDBM का क्षेत्रफल)

\Rightarrow माना वर्ग की भुजा a है।
 ΔDBM में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

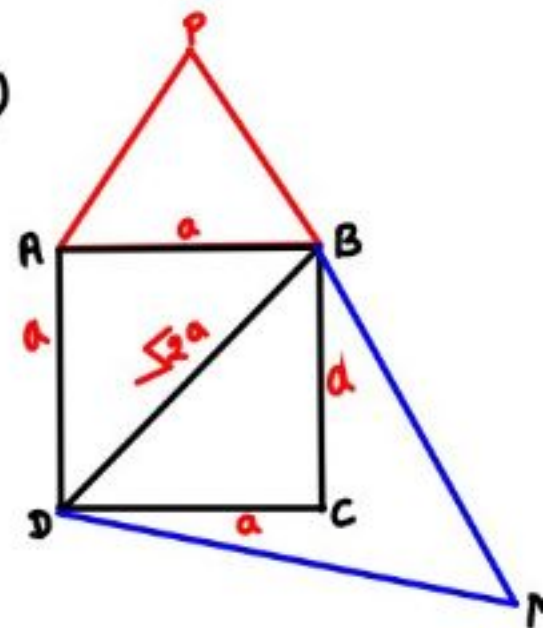
$$(DC)^2 + (CB)^2 = (DB)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + a^2 = (DB)^2$$

$$\Rightarrow 2a^2 = (DB)^2$$

$$\Rightarrow DB = \sqrt{2}a$$

$$\Rightarrow \boxed{DB = \sqrt{2}a}$$



$\triangle APB$ तथा $\triangle DBM$ समबाहु हैं

$$\angle A = \angle D = 60^\circ$$

$$\angle P = \angle B = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle B = \angle M = 60^\circ$$

अतः कोण-कोण समरूपता से,

$$\triangle APB \sim \triangle DBM$$

$$\text{अतः} \Rightarrow \frac{\triangle APB \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DBM \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{AB}{DB}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle APB \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DBM \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{a}{\sqrt{3}a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle APB \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DBM \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \triangle APB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{3} \triangle DBM \text{ का क्षेत्रफल}$$

प्रश्न-8 $\triangle ABC$ और $\triangle BDE$ दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य बिन्दु है। $\triangle ABC$ और $\triangle BDE$ के क्षेत्रफलों का अनुपात है:-

- (A) 2:1 (B) 1:2 (C) 4:1 (D) 1:4

हल:- $\triangle ABC$ व $\triangle BDE$ समबाहु हैं-

$$\text{अतः} \quad \angle A = \angle B = \angle C = \angle B$$

$$= \angle D = \angle E = 90^\circ$$

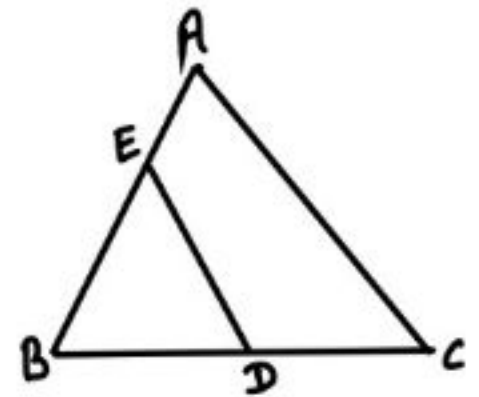
अतः कोण-कोण-कोण समरूपता से,

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDE$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle BDE)} = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \left(\frac{2BD}{BD}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle BDE)} = \frac{4}{1}$$

$$\text{अनुपात} = 4:1$$



प्रश्न-9 दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4:9 के अनुपात में हैं। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है:-

- (A) 2:3 (B) 4:9 (C) 8:16 (D) 16:81

क्षेत्रफलों का अनुपात = (भुजाओं का अनुपात)²

क्षेत्रफलों का अनुपात = $\left(\frac{4}{3}\right)^2$

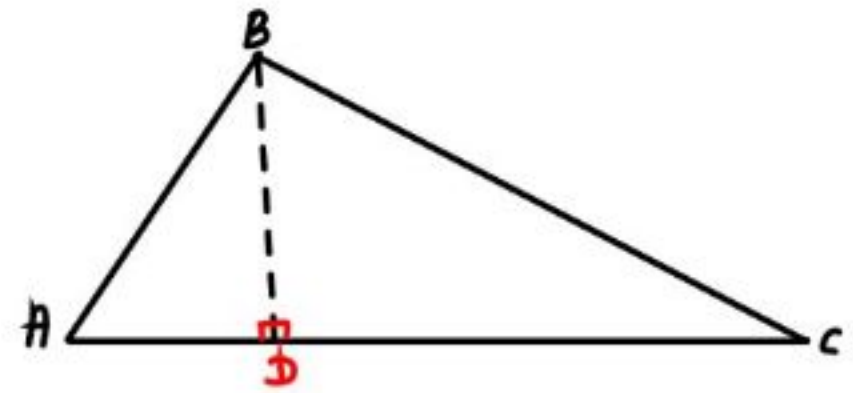
क्षेत्रफलों का अनुपात = $\frac{16}{9}$

प्रमेय 6.8 (पाइथागोरस प्रमेय)

कथन:- एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

हल:-
दिया है:-

ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें
 $\angle B = 90^\circ \rightarrow ①$



रचना:- शीर्ष B से भुजा AC पर लम्ब AD डाला।

सिद्ध करना है:- अतः $\angle D = 90^\circ \rightarrow ②$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

ΔABD व ΔABC में \rightarrow
 $\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

$$\angle B = \angle D = 90^\circ \text{ [समीकरण 1 व 2 से]}$$

अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\Delta ABD \sim \Delta ABC$$

अतः संगत भुजाओं का अनुपात बराबर होगा।

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

$$(AB)^2 = (AC)(AD) \text{ --- ③}$$

ΔBDC व ΔABC में,
 $\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ कोण)

$$\angle B = \angle D = 90^\circ \text{ [समीकरण 1 व 2 से]}$$

अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\triangle BDC \sim \triangle ABC$$

अतः संगत भुजाओं का अनुपात समान होगा।

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow (BC)^2 = (AC)(DC) \rightarrow (4)$$

समीकरण (3) व (4) →

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)(AD) + (AC)(DC)$$

$$(AB)^2 + (BC)^2 = AC[AD + DC]$$

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)(AC)$$

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

प्रमेय 6.9 (पाइथागोरस प्रमेय का विलोम)

कथन :- यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के योग के बराबर हो तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

हल :-

दिया है :- $AC^2 = AB^2 + BC^2$ — (1)

सिद्ध करना है :-

$$\angle B = 90^\circ$$

या $\triangle ABC$ समकोण त्रिभुज है,

रचना :-

$\triangle PQR$ एक समकोण त्रिभुज बनाए जिसमें $\angle Q = 90^\circ$ — (2)

तथा $AB = PQ$ — (3)

एवं $BC = QR$ — (4)

$\triangle PQR$ में,

$$\angle Q = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

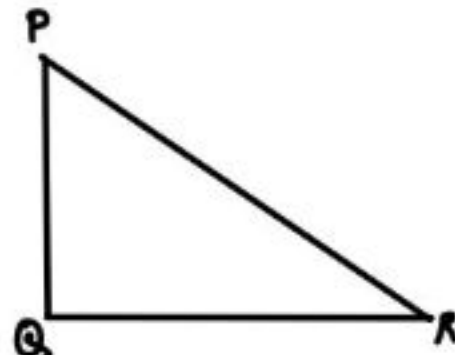
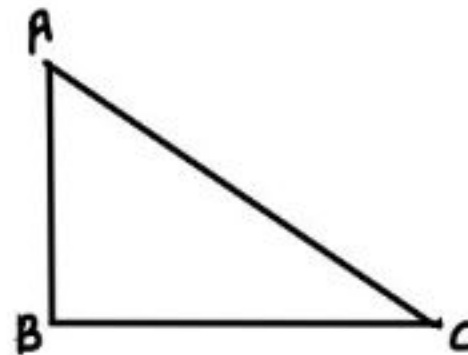
$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$\Rightarrow PR^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \rightarrow (5)$$

समीकरण (1) से मान समीकरण (5) में रखने पर →

$$PR^2 = AC^2$$

$$PR = AC \text{ — (6)}$$



समीकरण (3), (4) व (6) से \rightarrow

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

(भुजा - भुजा - भुजा सर्वांगसमता प्रमेय से)

अतः संगत कोण समान होंगे।

$$\text{अतः } \angle B = \angle Q$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle B = 90^\circ} \text{ (समीकरण 3 से)}$$

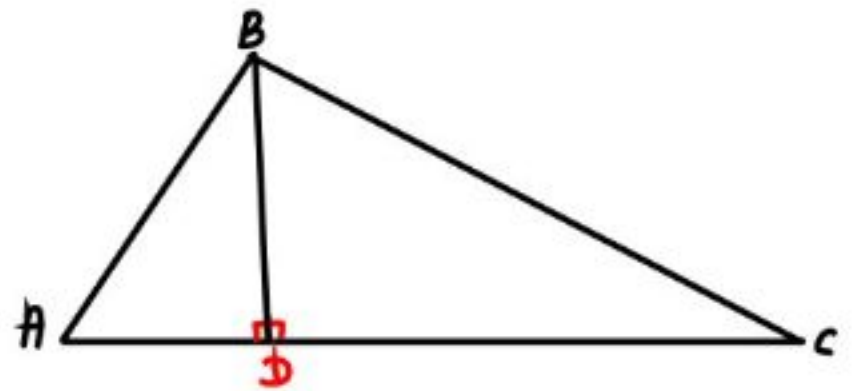
उदाहरण-10 आकृति में $\angle ACB = 90^\circ$ तथा $CD \perp AB$ है। सिद्ध कीजिए कि,

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD} \text{ है।}$$

दिया है:-

$$\angle C = 90^\circ \rightarrow (1)$$

$$\angle D = 90^\circ \rightarrow (2)$$



$\triangle ADC$ व $\triangle ACB$ में,
 $\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

$$\angle C = \angle D \text{ [समीकरण (1) व (2) से]}$$

अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\triangle ADC \sim \triangle ACB$$

अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होंगी,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow \boxed{(AC)^2 = (AB)(AD)} - (3)$$

$\triangle BDC$ व $\triangle ACB$ में,
 $\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)

$$\angle C = \angle D = 90^\circ \text{ [समीकरण (1) व (2) से]}$$

\Rightarrow अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\triangle BDC \sim \triangle ACB$$

अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होंगी,

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \boxed{(BC)^2 = (AB)(BD)} - (4)$$

$\triangle BDC$ व $\triangle ACB$ में,
 $\angle B = \angle B$ (उभयनिष्ठ)

$$\angle C = \angle D = 90^\circ \text{ [समीकरण ① व ② से]}$$

अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\triangle ADC \sim \triangle ACB$$

अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होगी,

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \boxed{(BC)^2 = (AB)(BD)} \text{ - ④}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{समी. ④}}{\text{समी. ③}} \Rightarrow \frac{(BC)^2}{(AC)^2} = \frac{(AB)(BD)}{(AB)(AD)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(BC)^2}{(AC)^2} = \frac{BD}{AD}}$$

उदाहरण-11 एक सिढ़ी किसी दीवार पर इस प्रकार टिकी है कि इसका निचला सिरा दीवार से 2.5 m की दूरी पर है तथा इसका ऊपरी सिरा भूमि से 6 m की ऊँचाई पर धनी एक खिड़की तक पहुँचता है। सिढ़ी की लम्बाई ज्ञात करो।

हल :-

$$\triangle ABC \text{ में, } \angle B = 90^\circ$$

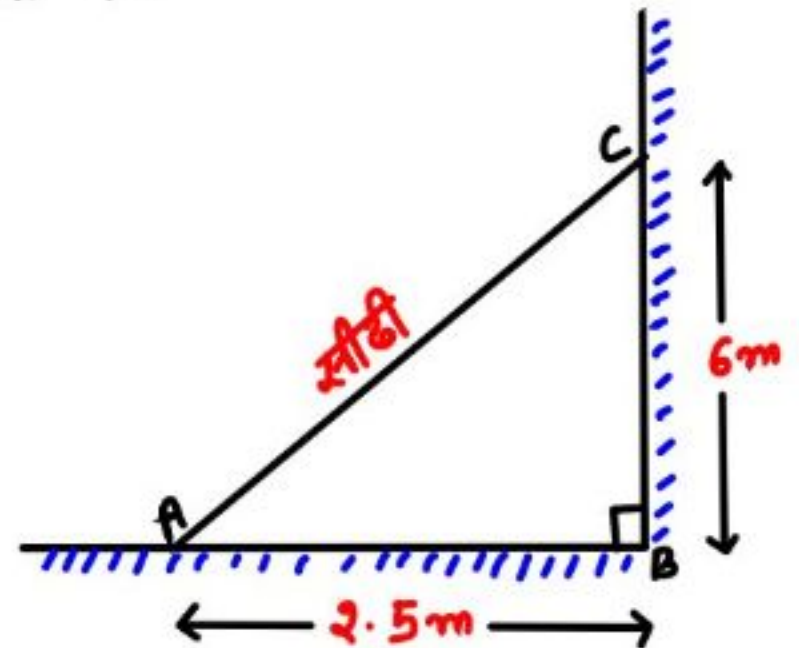
अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\begin{aligned} \Rightarrow AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= (2.5)^2 + (6)^2 \\ &= 6.25 + 36 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AC^2 = 42.25$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{42.25}$$

$$\Rightarrow \boxed{AC = 6.5 \text{ m.}}$$



उदाहरण-12 आकृति में $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि, $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है।

हल :-

$$\triangle ADB \text{ में, } \angle D = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,
 $\Rightarrow (AB)^2 = (BD)^2 + (AD)^2 - \textcircled{1}$

ΔADC में,

$$\angle D = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

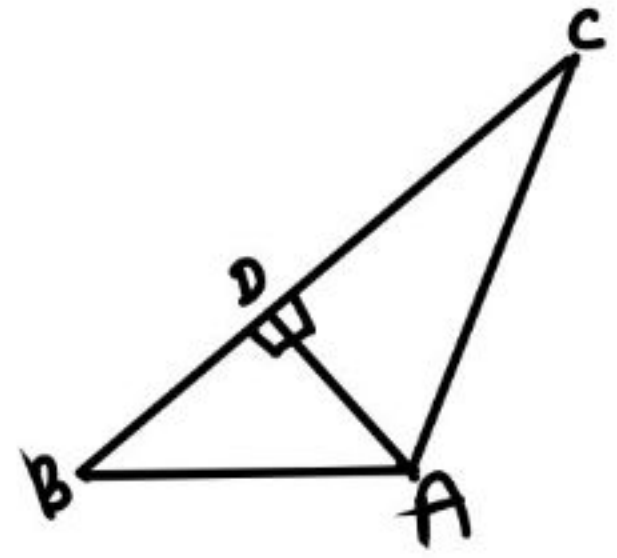
$$\Rightarrow (AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2 - \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow (AC)^2 - (CD)^2 = (AD)^2 \rightarrow \textcircled{2}$$

समीकरण $\textcircled{2}$ से $(AD)^2$ का मान समीकरण $\textcircled{1}$ में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow (AB)^2 = (BD)^2 + (AC)^2 - (CD)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$



उदाहरण-13 BL और CM एक समकोण त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ हैं तथा इस त्रिभुज का कोण A समकोण है सिद्ध कीजिए कि,

$$4[(BL)^2 + (CM)^2] = 5(BC)^2$$

हल:-

ΔACM में,

$$\angle A = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow CM^2 = AC^2 + (AM)^2 - \textcircled{1}$$

ΔALB में,

$$\angle A = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow BL^2 = AL^2 + AB^2 - \textcircled{2}$$

ΔACB में,

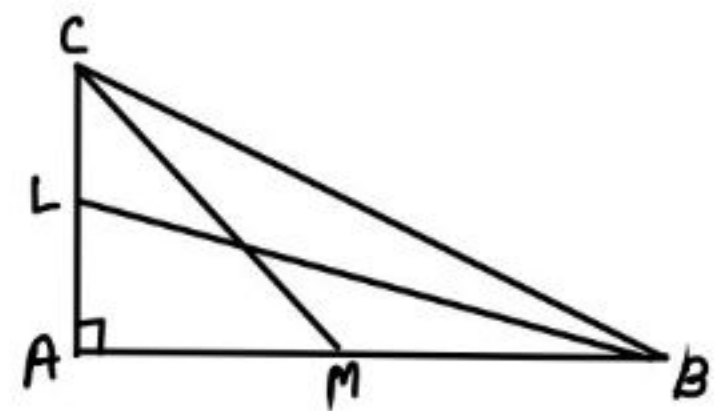
$$\angle A = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow BC^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - \textcircled{3}$$

$$AL = \frac{AC}{2} - \textcircled{4}$$

$$AM = \frac{AB}{2} - \textcircled{5}$$



समीकरण $\textcircled{1}$ + समीकरण $\textcircled{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow BL^2 + CM^2 = AL^2 + AB^2 + AC^2 + AM^2$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow BL^2 + CM^2 &= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2 + AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\
\Rightarrow BL^2 + CM^2 &= \frac{AC^2}{4} + \frac{AB^2}{1} + \frac{AC^2}{1} + \frac{AB^2}{1} \\
\Rightarrow BL^2 + CM^2 &= \frac{AC^2 + 4AB^2 + 4AC^2 + AB^2}{4} \\
\Rightarrow BL^2 + CM^2 &= \frac{5(AB)^2 + 5(AC)^2}{4} \\
\Rightarrow BL^2 + CM^2 &= \frac{5[(AB)^2 + (AC)^2]}{4} \\
\Rightarrow BL^2 + CM^2 &= \frac{5}{4}(BC)^2 \\
\Rightarrow 4(BL^2 + CM^2) &= 5(BC)^2
\end{aligned}$$

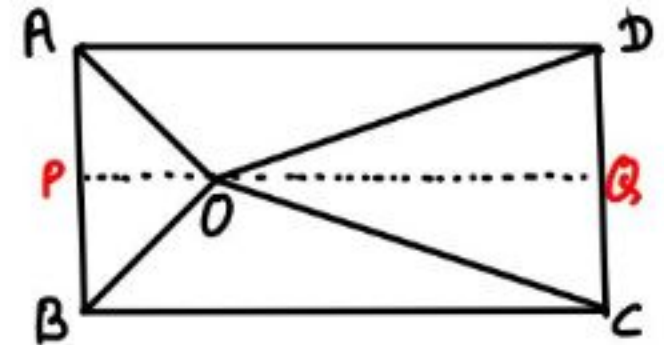
उदाहरण-14 आयत ABCD के अन्दर स्थित O कोई बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि-

$$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$$

हल :-

रचना :- O से जाती हुई BC के समान्तर रेखा PQ खींची।

अतः यहाँ $\angle P = 90^\circ$ तथा $\angle Q = 90^\circ$ होगा।



$\triangle APO$ में,

$$\angle P = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad \text{--- (1)}$$

$\triangle OPB$ में,

$$\angle P = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad \text{--- (2)}$$

$\triangle OQD$ में,

$$\angle Q = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$OD^2 = OQ^2 + QD^2 \quad \text{--- (3)}$$

$\triangle OQC$ में,

$$\angle Q = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow OC^2 = OQ^2 + QC^2 - (4)$$

$$\Rightarrow AP = QD - (5)$$

$$\Rightarrow QC = BP - (6)$$

समीकरण (2) + समीकरण (3) \rightarrow

$$\Rightarrow OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + QD^2$$

$$\Rightarrow OB^2 + OD^2 = QC^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \quad [\text{समी. (5) व (6) से}]$$

$$\Rightarrow OB^2 + OD^2 = (OP^2 + AP^2) + (OQ^2 + QC^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2} \quad [\text{समी. (3) व (4) से}]$$

प्रश्नावली 6.5

प्रश्न-1 कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि इनमें से कौन-कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

(i) 7cm, 24cm, 25cm
7cm, 24cm, 25cm

$$(25)^2 = 625$$

$$7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से,
दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

$$\boxed{\text{कर्ण} = 25\text{cm}}$$

$$(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2$$

सबसे बड़ी भुजा \rightarrow कर्ण

(ii) 3cm, 8cm, 6cm

$$8^2 = 64$$

$$3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$$

अतः समकोण त्रिभुज नहीं है।

(iii) 50cm, 80cm, 100cm

$$(100)^2 = 10000$$

$$(50)^2 + (80)^2 = 2500 + 6400 = 8900$$

अतः समकोण त्रिभुज नहीं है।

(iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

$$(13)^2 = 169$$

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

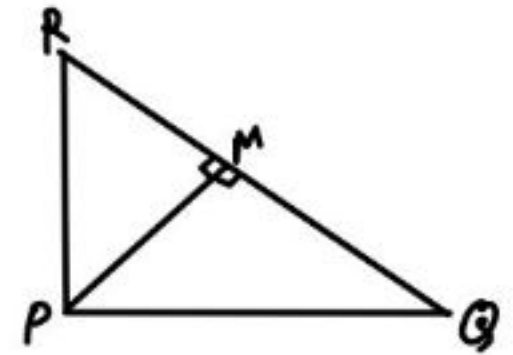
अतः पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से,
दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

$$\boxed{\text{कर्ण} = 13 \text{ cm}}$$

प्रश्न-2 PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिन्दु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है। दर्शाइए कि,

$$PM^2 = (QM)(MR)$$

$$\boxed{QR = QM + MR} \quad \text{--- ①}$$



$\triangle PMR$ में,

$$\angle M = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PM^2 + MR^2 = PR^2 \quad \text{--- ②}$$

$\triangle PMQ$ में,

$$\angle M = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PM^2 + QM^2 = PQ^2 \quad \text{--- ③}$$

$\triangle PQR$ में,

$$\angle P = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PQ^2 + PR^2 = QR^2 \quad \text{--- ④}$$

समीकरण ①, ② व ③ से मान समीकरण ④ में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow PM^2 + QM^2 + PM^2 + MR^2 = (QM + MR)^2$$

$$\Rightarrow PM^2 + QM^2 + PM^2 + MR^2 = QM^2 + MR^2 + 2(QM)(MR)$$

$$\Rightarrow 2(PM)^2 = 2(QM)(MR)$$

$$\Rightarrow \boxed{PM^2 = (QM)(MR)}$$

प्रश्न-3 आकृति में ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है। दर्शाइए कि,

(i) $AB^2 = BC \cdot BD$

$$BD = BC + CD \quad \text{--- (1)}$$

$\triangle ABC$ व $\triangle ABD$ में,

$$\angle C = \angle A = 90^\circ$$

$$\angle B = \angle B \quad (\text{उभयनिष्ठ})$$

अतः कोण-कोण समरूपता से,

$$\triangle ABC \sim \triangle ABD$$

अतः भुजाएँ समानुपाती होगी,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow (BD) \cdot (BC) = (AB)^2$$

$\triangle ABC$ में,

$$\angle C = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \quad \text{--- (2)}$$

$\triangle ACD$ में,

$$\angle C = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AD^2 = CD^2 + AC^2 \quad \text{--- (3)}$$

$\triangle ABD$ में,

$$\angle A = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

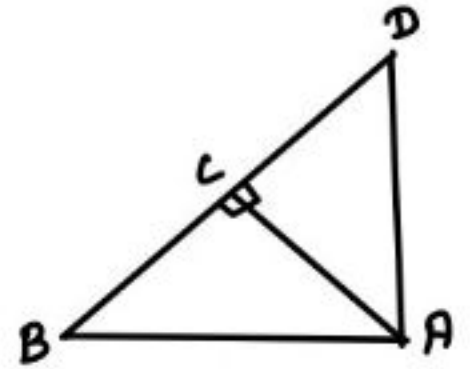
$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$\Rightarrow BC^2 + AC^2 + CD^2 + AC^2 = (BC + CD)^2$$

$$\Rightarrow BC^2 + AC^2 + CD^2 + AC^2 = BC^2 + CD^2 + 2(BC)(CD) \\ 2AC^2 = 2(BC)(CD)$$

$$AC^2 = (BC)(CD)$$

$\triangle ACD$ व $\triangle ABD$ में,



$$\angle D = \angle D \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$\angle C = \angle A = 90^\circ$$

⇒ अतः कोण-कोण समरूपता कसौटी से,

$$\triangle ACD \sim \triangle ABD$$

⇒ अतः संगत भुजाएँ समानुपाती होगी,

$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$$

$$\Rightarrow \boxed{(BD)(CD) = (AD)^2}$$

प्रश्न-4 ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि

$$AB^2 = 2(AC)^2$$

हल:-

⇒ समद्विबाहु त्रिभुज है

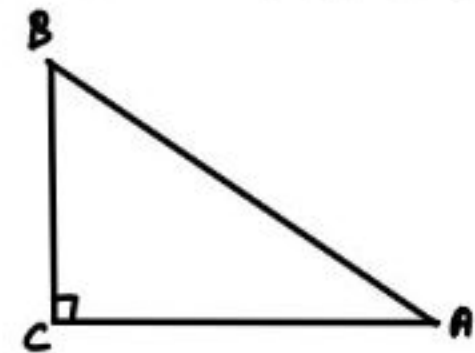
$$\text{अतः } AC = BC \text{ — (1)}$$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2 \text{ (समी. 1 से)}$$

$$\Rightarrow \boxed{AB^2 = 2AC^2}$$



प्रश्न 5 ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है तो, सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।

हल:-

दिया है :- (i) $\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें

$$\Rightarrow AC = BC \text{ — (1)}$$

$$\Rightarrow \text{(ii) } AB^2 = 2(AC)^2 \text{ — (2)}$$

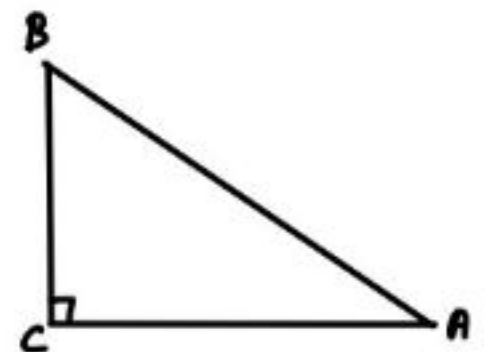
सिद्ध करना है :- $\triangle ABC$ समकोण त्रिभुज है

$$\text{समीकरण (2) से } \rightarrow AB^2 = 2(AC)^2$$

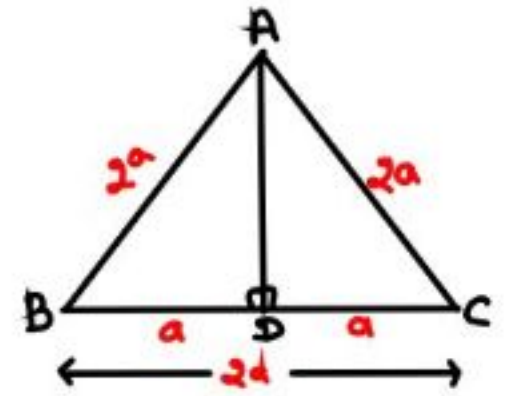
$$\Rightarrow AB^2 = (AC)^2 + (AC)^2$$

$$\Rightarrow (AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \text{ समीकरण (1) से}$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से,
दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।



प्रश्न-6 एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा 2a है। उसके प्रत्येक शीर्षलम्ब की लम्बाई ज्ञात करें।



AD शीर्षलम्ब है

$$\angle D = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$\triangle ADC$ में,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$\Rightarrow (2a)^2 = AD^2 + a^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 = AD^2 + a^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 - a^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{3a^2}$$

$$\boxed{AD = \sqrt{3}a}$$

प्रश्न-7 सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

हल:-

दिया है:- ABCD समचतुर्भुज है।

$$\Rightarrow AB = BC = CD = DA - (1)$$

$$\Rightarrow \angle O = 90^\circ - (2)$$

$$\Rightarrow OB = OD - (3)$$

$$\Rightarrow OC = OA - (4)$$

$$\Rightarrow OD = \frac{BD}{2} - (5)$$

$$\Rightarrow OC = \frac{AC}{2} - (6)$$

सिद्ध करना है:-

$$\Rightarrow (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (DA)^2 = AC^2 + BD^2$$

$\triangle ODC$ में,

$$\angle O = 90^\circ$$

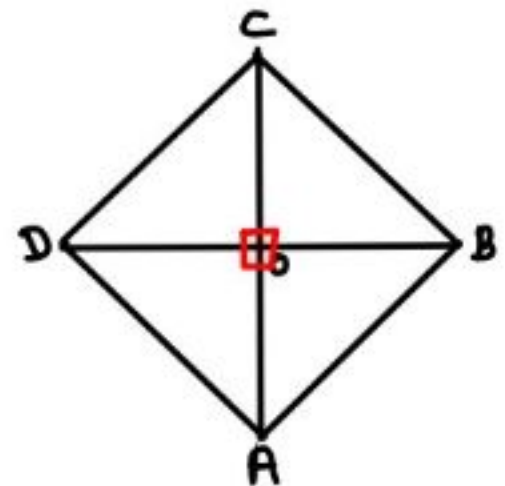
अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow OD^2 + OC^2 = CD^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = CD^2 \quad [\text{समीकरण (5) व (6) से}]$$

$$\Rightarrow \frac{BD^2}{4} + \frac{AC^2}{4} = CD^2$$

$$\Rightarrow BD^2 + AC^2 = 4CD^2$$



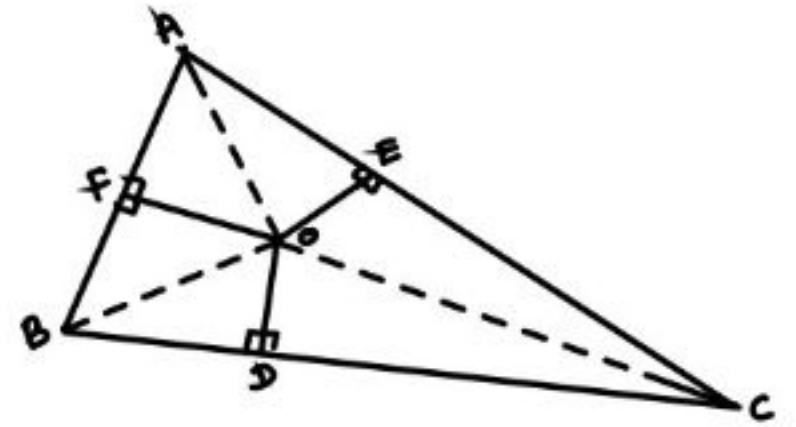
$$\Rightarrow BD^2 + AC^2 = CD^2 + CD^2 + CD^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

प्रश्न-8 आकृति में $\triangle ABC$ के अभ्यंतर में स्थित कोई बिन्दु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ तथा $OF \perp AB$ हैं। दर्शाइए कि,

$$(i) OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

$$(ii) AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$$



(i) $\triangle ACD$ में,

$$\angle C = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow OA^2 = OF^2 + AF^2 \quad \text{--- (1)}$$

इसी प्रकार $\triangle ODB$ व OEC में

$$\angle F \text{ व } \angle E = 90^\circ$$

$$\text{अतः } OB^2 = OD^2 + BD^2 \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow OC^2 = EC^2 + OE^2 \quad \text{--- (3)}$$

समीकरण (1) + (2) + (3) \Rightarrow

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 = OF^2 + AF^2 + OD^2 + BD^2 + EC^2 + OE^2$$

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

$\Rightarrow \triangle DEA$, $\triangle OFB$ व $\triangle ODC$

में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow OA^2 = AE^2 + OE^2 \quad \text{--- (4)}$$

$$\Rightarrow OB^2 = OF^2 + BF^2 \quad \text{--- (5)}$$

$$\Rightarrow OC^2 = OD^2 + CD^2 \quad \text{--- (6)}$$

समीकरण (4), (5) व (6) से मान समीकरण (4) में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2 \quad [\text{समीकरण (4) से}]$$

$$\Rightarrow AE^2 + OE^2 + OF^2 + BF^2 + OD^2 + CD^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

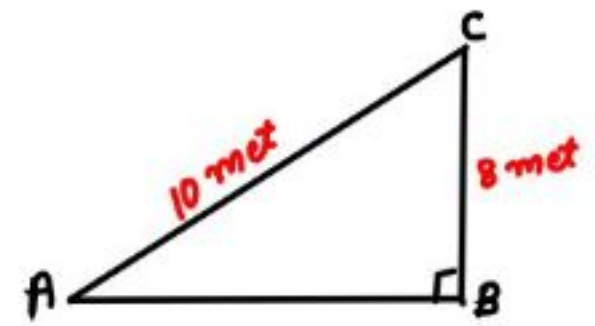
$$\Rightarrow AE^2 + BF^2 + CD^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$$

प्रश्न-9 10m लम्बी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात करो।

हल :-

\Rightarrow ABC एक समकोण त्रिभुज है
अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\begin{aligned}\Rightarrow AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ \Rightarrow 10^2 &= AB^2 + 8^2 \\ \Rightarrow 100 &= AB^2 + 64 \\ \Rightarrow AB^2 &= 100 - 64 \\ \Rightarrow AB^2 &= 36 \\ \Rightarrow AB &= \sqrt{36} \\ \Rightarrow AB &= 6\text{m.}\end{aligned}$$

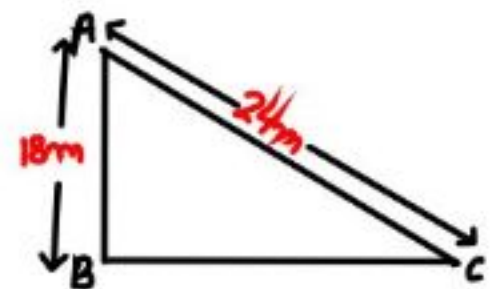


प्रश्न-10 18m ऊँचे एक उद्वर्धित खम्भे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है। खम्भे के आधार से खूँटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लम्बाई 24m है।

हल :-

ABC एक समकोण त्रिभुज है
अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

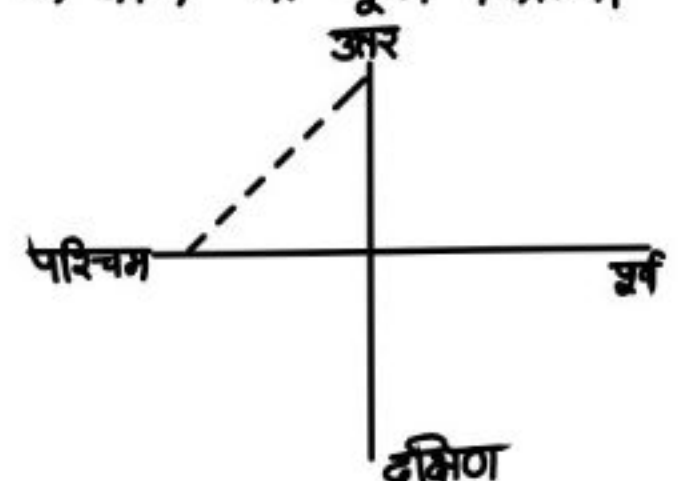
$$\begin{aligned}\Rightarrow AB^2 + BC^2 &= AC^2 \\ \Rightarrow 18^2 + BC^2 &= 24^2 \\ \Rightarrow 324 + BC^2 &= 576 \\ \Rightarrow BC^2 &= 576 - 324 \\ \Rightarrow BC^2 &= 252 \\ \Rightarrow BC &= \sqrt{252} \\ \Rightarrow BC &= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7} \\ \Rightarrow BC &= 2 \times 3\sqrt{7} \\ \Rightarrow BC &= 6\sqrt{7}\text{m.}\end{aligned}$$



प्रश्न-11 एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000km/hr की-चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200km/hr की-चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घण्टे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी।

हल :- $\triangle ABC$ एक समकोण त्रिभुज है
अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\begin{aligned}\Rightarrow AB^2 + BC^2 &= AC^2 \\ \Rightarrow (1800)^2 + (1500)^2 &= AC^2\end{aligned}$$



$$\Rightarrow 3240000 + 2250000 = AC^2$$

$$\Rightarrow 5490000 = AC^2$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{5490000}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{549} \times 100 \text{ km}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{3 \times 3 \times 61} \times 100$$

$$\Rightarrow AC = 300 \sqrt{61} \text{ km}$$

प्रश्न-12 दो खम्भे जिनकी ऊँचाइयाँ 6m और 11m हैं, ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके निचले सिरों के बीच दूरी 12m है तो इनके ऊपरी सिरों के बीच दूरी ज्ञात कीजिए।

हल:-

$\Rightarrow \triangle AMP$ एक समकोण त्रिभुज है

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow AM^2 + MP^2 = AP^2$$

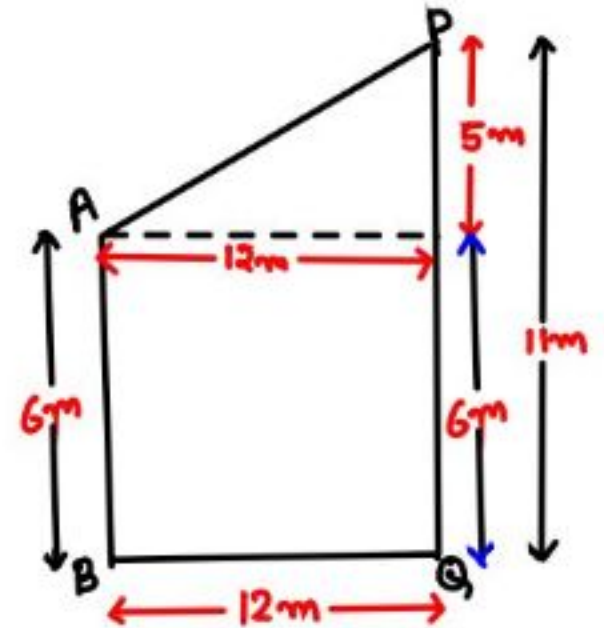
$$\Rightarrow 12^2 + 5^2 = AP^2$$

$$\Rightarrow 144 + 25 = AP^2$$

$$\Rightarrow 169 = AP^2$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{169}$$

$$\Rightarrow AP = 13 \text{ m.}$$



प्रश्न-13 एक त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB क्रमशः बिन्दु D और E स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$

हल:-

$\triangle ABC$ में,

$$\angle C = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2 \quad \text{--- (1)}$$

इसी प्रकार $\triangle ADC$ में,

$$\angle D = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

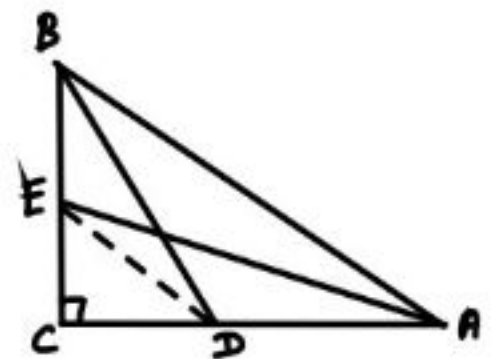
$$\Rightarrow BD^2 = BC^2 + CD^2 \quad \text{--- (2)}$$

$\triangle ECA$ में,

$$\angle C = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow AE^2 = CA^2 + EC^2 \quad \text{--- (3)}$$



$\triangle ECD$ में,

$$\angle C = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow ED^2 = EC^2 + CD^2 \quad \text{--- (4)}$$

समीकरण (2) + समीकरण (3) \Rightarrow

$$\Rightarrow AE^2 + BD^2 = BC^2 + CD^2 + CA^2 + EC^2$$

$$\Rightarrow AE^2 + BD^2 = BC^2 + AC^2 + EC^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow \boxed{AE^2 + BD^2 = AB^2 + ED^2} \quad [\text{समीकरण (1) व (4) से}]$$

प्रश्न-14 किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लम्ब BC को बिन्दु D पर इस प्रकार विच्छेद करता है कि $DB = 3(CD)$ है। सिद्ध कीजिए कि,

$$2(AB)^2 = 2(AC)^2 + (BC)^2$$

हल:-

$$\begin{aligned} BC &= CD + DB \\ \Rightarrow BC &= CD + 3(CD) \\ \Rightarrow BC &= 4(CD) \\ \Rightarrow CD &= \frac{BC}{4} \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

$$\text{समीकरण (1) } \Rightarrow DB = 3\left(\frac{BC}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{DB = \frac{3}{4}(BC)} \quad \text{--- (3)}$$

$\triangle ADC$ में,

$$\angle D = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow AC^2 = CD^2 + AD^2 \quad \text{--- (4)}$$

$\triangle BDA$ में,

$$\angle D = 90^\circ$$

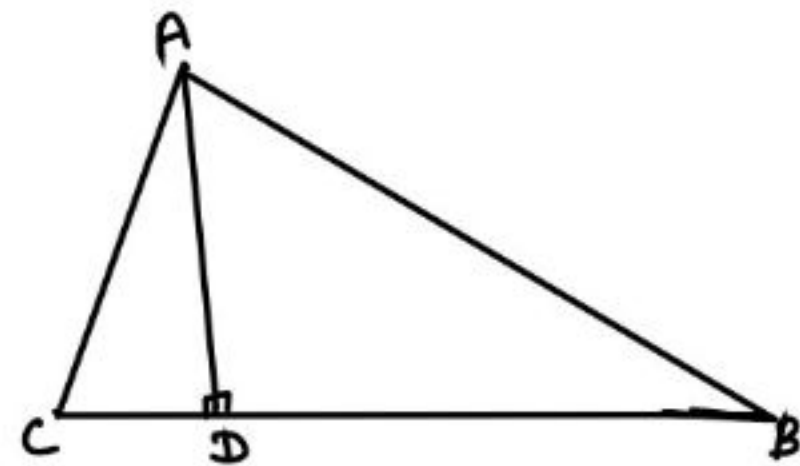
अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow AB^2 = AD^2 + DB^2 \quad \text{--- (5)}$$

$$\Rightarrow AD^2 = AB^2 - DB^2 \quad \text{--- (6)}$$

समीकरण (6) से मान समीकरण (4) में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow AC^2 = CD^2 + AB^2 - DB^2$$



$$\Rightarrow AC^2 = \left(\frac{BC}{4}\right)^2 + AB^2 - \left[\frac{3}{4}(BC)\right]^2 \quad [\text{समीकरण (2) व (3) से}]$$

$$\Rightarrow AC^2 = \frac{BC^2}{16} + AB^2 - \frac{9}{16}(BC)^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = \frac{BC^2}{16} - \frac{9}{16}(BC)^2 + (AB)^2$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = \frac{(BC)^2 - 9(BC)^2}{16} + (AB)^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = -\frac{8(BC)^2}{16} + AB^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = -\frac{BC^2}{2} + AB^2$$

$$\Rightarrow AC^2 + \frac{BC^2}{2} = AB^2$$

$$\Rightarrow \frac{2AC^2 + BC^2}{2} = AB^2$$

$$\boxed{2AC^2 + BC^2 = 2AB^2}$$

प्रश्न-15 किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है। सिद्ध कीजिए कि, $9AD^2 = 7AB^2$

हल:-

$$\Rightarrow BD = \frac{1}{3}BC \quad \text{--- (1)}$$

रचना:- A से BC पर लम्ब AM डाला।

\Rightarrow अतः $BM = MC$ (समबाहु त्रिभुज)

$$\text{एवं } BM = \frac{1}{2}BC \quad \text{--- (2)}$$

$$\Rightarrow BM = BD + DM$$

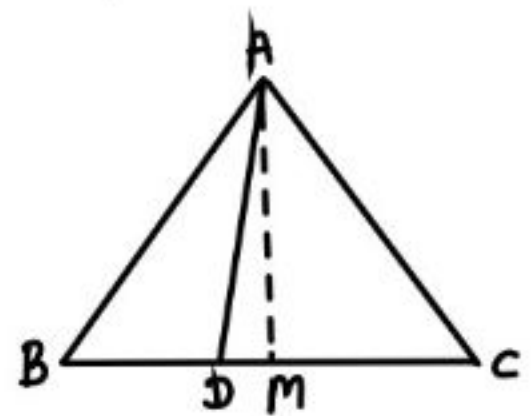
$$\Rightarrow \frac{1}{2}BC = \frac{1}{3}BC + DM$$

$$\Rightarrow DM = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{3}BC$$

$$\Rightarrow DM = \frac{3BC - 2BC}{6}$$

$$\Rightarrow DM = \frac{BC}{6} \quad \text{--- (3)}$$

ΔABC समबाहु त्रिभुज है



$$\Rightarrow \text{अतः } AB = BC = AC - (4)$$

$\triangle ABM$ में,

$$\angle M = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow AB^2 = BM^2 + AM^2 - (5)$$

$\triangle AMD$ में,

$$\angle M = 90^\circ$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow AD^2 = AM^2 + DM^2 - (6)$$

$$\Rightarrow AM^2 = AD^2 - DM^2 - (7)$$

समीकरण (7) से मान (5) में रखने पर \rightarrow

$$\Rightarrow AB^2 = BM^2 + AD^2 - DM^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + AD^2 - \left(\frac{BC}{6}\right)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AD^2 - \left(\frac{AB}{6}\right)^2 \quad [\text{समीकरण (4) से}]$$

$$\Rightarrow AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{6}\right)^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 - \frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{36} = AD^2$$

$$\Rightarrow \frac{36AB^2 - 9AB^2 + AB^2}{36} = AD^2$$

$$\Rightarrow \frac{28}{36} AB^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow \frac{7}{9} AB^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow \boxed{7AB^2 = 9AD^2}$$

प्रश्न-16 किसी समबाहु त्रिभुज में सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलम्ब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

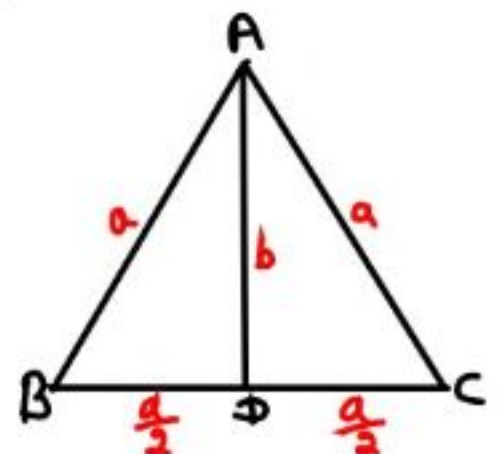
हल:-

माना भुजा = a

शीर्षलम्ब = b

सिद्ध करना है :-

$$\boxed{3a^2 = 4b^2}$$



$$\begin{aligned}
&\Rightarrow AD \text{ समकोण त्रिभुज है} \\
&\text{अतः पाइथागोरस प्रमेय से,} \\
&\Rightarrow AC^2 = AD^2 + DC^2 \\
&\Rightarrow d^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
&\Rightarrow d^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} \\
&\Rightarrow d^2 - \frac{a^2}{4} = b^2 \\
&\Rightarrow \frac{4d^2 - a^2}{4} = b^2 \\
&\Rightarrow \frac{3d^2}{4} = b^2 \\
&\Rightarrow \boxed{3a^2 = 4b^2}
\end{aligned}$$

प्रश्न-17 $\triangle ABC$ में, $AB = 6\sqrt{3} \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$ और $BC = 6 \text{ cm}$ है। कोण B है।

(A) 120° (B) 60° (C) 30° (D) 45°

हल:- (C)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow AC^2 = 12^2 = 144 \\
&\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \\
&\Rightarrow AC^2 = (6\sqrt{3})^2 + (6)^2 \\
&\Rightarrow AC^2 = (36 \times 3) + 36 \\
&\Rightarrow AC^2 = 108 + 36 \\
&\Rightarrow AC^2 = 144 \\
&\Rightarrow \boxed{AC^2 = AB^2 + BC^2}
\end{aligned}$$

अतः पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से,
दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।